

Jukka Kangasaho ◦ Jukka Mäkinen ◦ Juha Oikkonen ◦
Johannes Paasonen ◦ Maija Salmela ◦ Jorma Tahvanainen

Pitkä matematiikka

Funktiot ja yhtälöt



Sanoma Pro Oy
Helsinki

Tiedustelut

Sanoma Pro Oy, Helsinki

puh. 020 391 000

sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta

Pitkä matematiikka 1 Funktiot ja yhtälöt ISBN 978-952-63-1569-0

6 kk lisenssi ISBN 978-952-63-1913-1

48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-1914-8

Toimitus: Ville Sipiläinen, Riita-Liisa Eerola

Ulkoasu: graafinen suunnittelu Veera Alanko, kansi Timo Jokivartio

Taitto: Jukka Nieminen

Piirroksat: Picman Oy, Pekka Könönen

© Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Juha Oikkonen, Johannes Paasonen,
Maija Salmela, Jorma Tahvanainen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot

Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka
on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Sisällys

Luonnolliset luvut ja kokonaisluvut	9
Rationaaliluvut	16
Ensimmäisen asteen yhtälö	22
Suoraan verrannollisuus	31
Kääntäen verrannollisuus	38
Prosenttilaskennan kertaus ja täydennys	46
Perustilanteet	47
Vertaaminen prosenteilla ja prosenttilukujen vertaaminen	51
Muuttuneen arvon laskeminen	55
Prosenttilausekkeita	57
Tehtäviä prosenttilaskennasta	61
Potenssi	63
Lukujärjestelmät	71
Potenssilausekkeet	73
Negatiivinen eksponentti ja eksponentti nolla	83
Neliöjuuri	92
Neliöjuurilla laskeminen	98
Neliöyhtälö	104
Potenssifunktiot ja korkeammat juuret	110
Eksponenttifunktio	121
Murtopotenssi $a^{\frac{m}{n}}$	130
Eksponentin ratkaiseminen	142
Kertaus	147
Kertaustehtäviä	161
Tehtäväsarjoja	166
Tehtävien vastaukset	169
Hakemisto	197

Lukijalle

Pitkä matematiikka

Useimmat luonnontieteiden ja tekniikan saavutukset perustuvat matematiikan tuloksiin, niin myös yhä enemmän monet yhteiskuntatieteiden ja humanististen tieteiden oivallukset. Pelkän teoreettisen uteliaisuudenkin innoittamana löydetty matemaattinen tieto on usein osoittautunut yllättävän hyödylliseksi. Matematiikassa yhdistyy kiehtovalla tavalla kaksi piirrettä: se on luovan ajattelun ja oivaltamisen leikkiä ja samalla täsmällistä ja loogista.

Pitkä matematiikka -sarjan tavoitteena on, että oppilas matematiikan tietojen ja taitojen lisäksi oppii ymmärtämään matematiikan erityisluonteen tiedonalana, jossa teoreettinen kohtaa käytännöllisen ja jossa luova oivaltaminen kohtaa täsmällisen loogisuuden.

Eteneminen

Luvun avaa aihepiiriin johdatteleva ongelma tai esimerkki. Uusi teoreettinen tieto kootaan ja perustellaan, ja lisäesimerkit opastavat tiedon hyväksikäyttöön ja syventämiseen. Esimerkit on laadittu niin, että opiskelijat voivat omaksua ne itsenäisesti. Siten tuntityöskentelyssä voidaan usein jo aikaisessa vaiheessa siirtyä itsenäiseen harjoitteluun, jolloin opiskelijat etenevät omassa tahdissaan kirjan esimerkkejä hyödyntäen. Näin menetellen kaikki opiskelijat harjaantuvat perustaidoissa, ja samalla nopeammin etenevillä on mahdollisuus tietojen ja taitojen syventämiseen. Kun opiskelijat ohjataan käyttämään hyväkseen kirjan esimerkkejä ja teoriaosuuksia, tarve vihkomuistiinpanojen tekemiseen oppitunnilla vähenee ja opiskelijat voivat paremmin keskittyä opetukseen.

Harjoittelu

Lukujen harjoitukset ovat kahtena sarjana.

Sarja I sisältää perustehtäviä, jotka harjoittavat uusia menetelmiä, tukevat teoreettisen tiedon ymmärtämistä ja juurruttamista sekä ohjaavat opitun soveltamiseen. Enimmäkseen tehtävät heijastelevat luvun esimerkkien tilanteita. Sarjaa I voidaan käyttää esimerkiksi oppitunnin aikana tapahtuvaan harjoitteluun.

Sarja II sisältää perustehtävien lisäksi vaativampia tehtäviä, joissa usein on myös matematiikan harrastamiseen innostavaa syventävää tietoa. Sarjasta II voidaan valikoida oppitunnin mittaan havaittujen tarpeiden mukaiset helpommat ja vaativammat kotitehtävät.

Kirjan esimerkit ja teoriaosuudet ovat apuna myös kotitehtävien parissa työskenneltäessä. Kaikkia tarpeellisina pidettyjä tietoja tai sovellustilanteita ei siis tarvitse käsitellä oppitunnin aikana, vaan niihin voidaan perehtyä ratkaistaessa kotitehtäviä kirjan esimerkkien avulla.

Kertaaminen

Opiskelijat voivat kerrata koko kurssin kertausluvun avulla. Luvussa käydään ensin läpi kurssin koko sisältö esimerkeillä havainnollistettuna. Sen jälkeen on samojen otsikoiden mukaan järjestettyjä riittävän osaamisen takaavia perustehtäviä. Kertausluvun päättävissä tehtäväsarjoissa on vaativampia tehtäviä koko kurssin alueelta. Kertausluvun tehtävien vastauksissa on, kuten monien tehtävien vastauksissa kautta koko kurssin, ratkaisemista tukevia ohjeita.

Funktiot ja yhtälöt

Tähän niteeseen sisältyvä kurssi aloittaa pitkän matematiikan lukio-opiskelut. Aluksi kurssilla varmennetaan ja täydennetään ensimmäisen asteen yhtälön ratkaisutaitoja, verrannollisuuden ymmärtämistä ja prosenttilaskennan hallintaa. Tämän jälkeen kurssin keskeiseksi teemaksi vakiintuu eri näkökulmista tarkasteltu potenssin käsite. Opitaan muun muassa potenssin yleistys tilanteisiin, joissa eksponenttina on murtoluku. Lisäksi opitaan ratkaisemaan erilaisia potenssiyhtälöitä sekä perehdytään potenssi- ja eksponenttifunktioihin.

Toivotamme mielenkiintoisia ja tuloksellisia työskentelyhetkiä.

Helsingissä 1.6.2004

Tekijät

Ajankäyttöehdotus

Tässä ajankäyttöehdotuksessa kurssin opiskeluun käytetään 28 oppituntia.

Luku	Tuntimäärä
Luonnolliset luvut ja kokonaisluvut	1
Rationaaliluvut	2
Ensimmäisen asteen yhtälö	2
Suoraan verrannollisuus	2
Kääntäen verrannollisuus	1
Prosenttilaskennan kertaus ja täydennys.	4
Potenssi	1
Potenssilausekkeet	2
Negatiivinen eksponentti ja eksponentti nolla	2
Neliöjuuri	2
Neliöjuurilla laskeminen.	2
Neliöyhtälö	1
Potenssifunktiot ja korkeammat juuret	2
Eksponenttifunktio	1
Murtopotenssi $a^{\frac{m}{n}}$	2
Eksponentin ratkaiseminen	1

Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003 (ote)

Matematiikan pitkä oppimäärä

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tehtävänä on antaa opiskelijalle matemaattiset valmiudet, joita tarvitaan ammatillisissa opinnoissa ja korkeakouluopinnoissa. Pitkän matematiikan opinnoissa opiskelijalla on tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta. Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa.

Opetuksen tavoitteet

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija

- tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn ja oppii sitä kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa
- rohkaistuu kokeilemaan ja tutkimaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin
- ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä
- oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena
- kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan
- harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä
- harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita
- osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.

Funktiot ja yhtälöt (MAA1)

Tavoitteet

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- vahvistaa yhtälön ratkaisemisen ja prosenttilaskennan taitojaan
- syventää verrannollisuuden, neliöjuuren ja potenssin käsitteiden ymmärtämistään
- tottuu käyttämään neliöjuuren ja potenssin laskusääntöjä
- syventää funktiokäsitteen ymmärtämistään tutkimalla potenssi- ja eksponenttifunktioita
- oppii ratkaisemaan potenssiyhtälöitä.

Keskeiset sisällöt

- potenssifunktio
- potenssiyhtälön ratkaiseminen
- juuret ja murtopotenssi
- eksponenttifunktio

Luonnolliset luvut ja kokonaisluvut

Ongelma

Laske päässälaskuna.

a) $(799 + 1486) + 201$ b) $4 \cdot (37 \cdot 25)$ c) $5698 \cdot 98 + 2 \cdot 5698$

Mitä luonnollisten lukujen laskutoimitusten ominaisuuksia käytit?

Luonnolliset luvut

Lukumäärien ilmaisemiseen käytettäviä lukuja $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ kutsutaan *luonnollisiksi luvuiksi*. Luonnollisten lukujen joukkoa merkitään kirjaimella $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Luonnollisten lukujen joukossa on kaksi laskutoimitusta: yhteenlasku ja kertolasku.

Mitkä tahansa kaksi luonnollista lukua m ja n voidaan laskea yhteen eli voidaan muodostaa summa $m + n$, joka on myös luonnollinen luku. Samoin mitkä tahansa kaksi luonnollista lukua m ja n voidaan kertoa keskenään eli voidaan muodostaa tulo $m \cdot n$, joka sekin on luonnollinen luku.

Kertolaskun ja yhteenlaskun välillä on yhteys

$$m \cdot n = \underbrace{n + n + \dots + n}_{m \text{ yhteenlaskettavaa}}$$

m yhteenlaskettavaa

Luonnollisten lukujen laskutoimituksilla on seuraavat ominaisuudet.

Yhteenlaskun vaihdantalaki

Kaikilla luonnollisilla luvuilla m ja n on

$$m + n = n + m.$$

Yhteenlaskettavien järjestys voidaan vaihtaa.

Yhteenlaskun liitântälaki

Kaikilla luonnollisilla luvuilla m , n ja p on

$$(m + n) + p = m + (n + p).$$

Kun lasketaan kolmen luvun summa, niin osasummat voidaan laskea missä järjestyksessä tahansa.

Yhteenlaskun liitântälain perusteella kolmen tai useamman luvun summa voidaan merkitä ilman sulkeita.

Esimerkiksi summa $(867 + 289) + 711$ voidaan merkitä $867 + 289 + 711$. Summaa laskettaessa voidaan laskea ensin kahden viimeisen luvun summa: $867 + 289 + 711 = 867 + 1\,000 = 1\,867$.

Kertolaskun vaihdantalaki

Kaikilla luonnollisilla luvuilla m ja n on

$$m \cdot n = n \cdot m.$$

Tulon tekijöiden järjestys voidaan vaihtaa.

Kertolaskun liitântälaki

Kaikilla luonnollisilla luvuilla m , n ja p on

$$(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p).$$

Kun lasketaan kolmen tai useamman luvun tulo, niin osatulot voidaan laskea missä järjestyksessä tahansa.

Kertolaskun liitântälain nojalla kolmen tai useamman luonnollisen luvun tulo voidaan merkitä ilman sulkeita.

Esimerkiksi tulo $8 \cdot (125 \cdot 17)$ voidaan merkitä $8 \cdot 125 \cdot 17$. Tuloa laskettaessa voidaan laskea ensin kahden ensimmäisen luvun tulo: $8 \cdot 125 \cdot 17 = 1\,000 \cdot 17 = 17\,000$.

Osittelulaki

Kaikilla luonnollisilla luvuilla m , n ja p on

$$p \cdot (m + n) = p \cdot m + p \cdot n \quad \text{Yhteenlaskettavat voidaan kertoa erikseen.}$$

eli

$$p \cdot m + p \cdot n = p \cdot (m + n). \quad \text{Tulojen summasta voidaan erottaa yhteinen tekijä.}$$

Esimerkiksi:

$$4 \cdot 258$$

$$= 4 \cdot (250 + 8) \quad \text{Yhteenlaskettavat kerrotaan erikseen.}$$

$$= 4 \cdot 250 + 4 \cdot 8$$

$$= 1\,000 + 32 = 1\,032$$

$$387 \cdot 6 + 387 \cdot 4 \quad \text{Erotetaan yhteinen tekijä.}$$

$$= 387 \cdot (6 + 4)$$

$$= 387 \cdot 10 = 3\,870$$

JOHDANTOESIMERKKI 1

Mikä luonnollinen luku toteuttaa yhtälön?

a) $x + 5 = 7$ b) $x + 7 = 5$

Ratkaisu

a) Yhtälön $x + 5 = 7$ toteuttaa luonnollinen luku 2, sillä $2 + 5 = 7$.

b) Yhtälöä $x + 7 = 5$ ei toteuta mikään luonnollinen luku. Yhtälön toteuttaa kokonaisluku -2 .

Vastaus

a) 2 b) Ei mikään.

Kokonaisluvut

Luvut $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ ovat *kokonaislukuja*. Kokonaislukujen joukkoa merkitään kirjaimella $\mathbb{Z}$.

Vastaluku

Kokonaislukujen joukossa jokaisella luvulla on *vastaluku*. Luvun a vastaluku merkitään $-a$. Luvun ja vastaluvun summa on nolla:

$$a + (-a) = 0.$$

Luvun 2 vastaluku on luku -2 , sillä $2 + (-2) = 0$.

Merkintä $-(-5)$ tarkoittaa luvun -5 vastalukua. Luvun -5 vastaluku on luku 5 , sillä $-5 + 5 = 0$. Siis $-(-5) = 5$.

Luku ja sen vastaluku ovat lukusuoralla yhtä etäällä nolasta.

$$a \geq 0 \quad \begin{array}{c} \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} \rightarrow \\ \quad -a \quad 0 \quad a \end{array}$$

$$a < 0 \quad \begin{array}{c} \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} \rightarrow \\ \quad a \quad 0 \quad -a \end{array}$$

Kokonaislukujen joukossa erotus voidaan aina muuttaa summaksi:

$$a - b = a + (-b) \quad \text{Lisätään vastaluku.}$$

ja summa erotukseksi:

$$a + b = a - (-b). \quad \text{Vähennetään vastaluku.}$$

Kokonaislukujen yhteenlaskulle ja kertolaskulle ovat voimassa samat vaihdanta-, liitântä- ja osittelulait kuin luonnollisten lukujen yhteen- ja kertolaskulle.

ESIMERKKI 2

Muuta erotus summaksi ja laske erotuksen arvo.

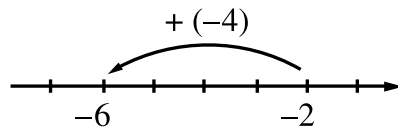
a) $-2 - 4$ b) $-23 - (-5)$

Ratkaisu

a) $-2 - 4 = -2 + (-4) = -6$

$$a - b = a + (-b)$$

Kun $b = 4$, niin $-b = -4$.

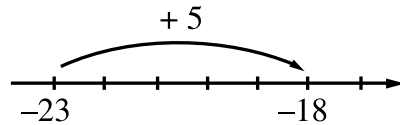


Siirrytään lukusuoralla -2 :sta neljä yksikköä vasemmalle.

b) $-23 - (-5) = -23 + 5 = -18$

$$a - b = a + (-b)$$

Kun $b = -5$, niin $-b = 5$.



Siirrytään lukusuoralla -23 :sta viisi yksikköä oikealle.

Vastaus

a) $-2 + (-4) = -6$ b) $-23 + 5 = -18$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

1. Laske päässälaskuna käyttämällä hyväksi luonnollisten lukujen laskutoimitusten ominaisuuksia. Mitä laskutoimitusten ominaisuuksia käytit?

- a) $917 + (856 + 83)$
- b) $4 \cdot 76 \cdot 250$
- c) $25 \cdot 42$
- d) $769 \cdot 7 + 769 \cdot 3$

2. Mikä on luvun vastaluku?

- a) -11
- b) 78
- c) 0

3. Määritä.

- a) $-(-6)$
- b) $-(5 - 14)$
- c) $-(-(-9))$

4. Muuta

- a) erotukset $-5 - 9$ ja $3 - (-11)$ summiksi
- b) summat $3 + 7$ ja $-5 + (-9)$ erotuksiksi.

5. Laske.

- a) $-3 + 4$
- b) $-10 - 7 + 3$
- c) $19 - (-5 - 1)$
- d) $-107 - (-8) + (-2)$

6. Laske käyttämällä *kertolaskun merkkisääntöä*: Kahden samanmerkkisen luvun tulo on positiivinen, ja kahden erimerkkisen luvun tulo on negatiivinen.

- a) $3 \cdot (-5)$
- b) $(-4) \cdot (-10)$
- c) $-6 \cdot 5 - 4$
- d) $5 - 7(-6 + 4)$

7. Laske käyttämällä *jakolaskun merkkisääntöä*: Kahden samanmerkkisen luvun osamäärä on positiivinen, ja kahden erimerkkisen luvun osamäärä on negatiivinen.

- a) $\frac{-20}{5}$
- b) $\frac{24 - 6}{-6}$
- c) $-150 + 50 : (-25)$
- d) $(-150 + 50) : (-25)$

8. Saata lauseke sellaiseen muotoon, jossa ei ole sulkeita.

- a) $3(a + b)$
- b) $5(ab)$
- c) $4(a - (-b))$
- d) $4a(-b)$
- e) $-6(-a(-b))$

9. Kokonaislukujen osamäärä määritellään kertolaskun avulla: $\frac{m}{n} = q$ silloin, kun $m = nq$.

Miksi osamäärä a) $\frac{6}{0}$ b) $\frac{0}{0}$ ei ole määritelty eli miksi *nollalla ei saa jakaa*?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

10. Käytä hyväksi kokonaislukujen laskutoimitusten ominaisuuksia ja laske päässä. Mitä laskutoimitusten ominaisuuksia käytit?

- a) $-359 + 687 + 360$
- b) $25 \cdot (89 \cdot 4)$
- c) $45 \cdot (-79) + 45 \cdot (-21)$
- d) $75 \cdot 102$

11. Päättele yhtälön ratkaisu.

- a) $-x = 9$
- b) $-x = 0$
- c) $-x = a - b$

12. Ilmaise luku -2 neljällä eri tavalla lukujen 3 ja 5 ja niiden vastalukujen summana ja erotuksena.

13. Laske.

- a) $-23 - 4 + 6$
- b) $-999 - (-2) - 6$
- c) $300 + 100 \cdot (-4)$
- d) $-200 - 50 \cdot (-3 \cdot 2)$

14. Laske.

- a) $-20 : 4 - 2$
- b) $60 - 100 : (-4)$
- c) $(60 - 100) : (-4)$

15. Sievennä lauseke sellaiseen muotoon, jossa ei ole sulkeita.

- a) $-(a + b)$
- b) $-(-a + b)$
- c) $-(-a) + b$
- d) $-(-a(-b))$

16. Samanmuotoisten termien yhdistäminen perustuu osittelulakiin: esimerkiksi $x - 3x = 1 \cdot x - 3 \cdot x = (1 - 3) \cdot x = -2x$. Sievennä.

- a) $-x + 6x$
- b) $-4,1x - 1,9x$
- c) $-x - (-5x)$
- d) $x - 3,3x + 0,3x$

17. Merkitse lauseke ”lukujen a ja b vastalukujen erotus” ja laske lausekkeen arvo, kun

- a) $a = -3$ ja $b = 4$
- b) $a = 5$ ja $b = -7$.

18. Anna esimerkkejä luvuista a , joille pätee

- a) $-a > 0$
- b) $-a > a$.

Millä a :n arvoilla on

- c) $-a > 0$
- d) $-a > a$
- e) $-a < a$
- f) $-a = a$?

19. Vielä 1700-luvulla monet pitivät negatiivisia lukuja järjenvastaisina. Yksi syy tähän oli

laskutoimituksissa: Osamäärien $\frac{-6}{3}$ ja $\frac{6}{-3}$

arvo on sama -2 . Eli ”kun pieni luku jaetaan suurella luvulla, saadaan sama tulos kuin silloin, kun suuri luku jaetaan pienellä luvulla”. Tämä näyttää ristiriidalta, jos odotetaan jakolaskulta samanlaisia ominaisuuksia kuin positiivisten lukujen jakolaskulta. Väärät yleistykset positiivisten lukujen ominaisuuksista kaikkien lukujen ominaisuuksiin ovat vieläkin monien lasku- ja päättelyvirheiden takana.

- a) Etsi samanlainen ”ristiriita” kertolaskusta.
- b) Miksi nimitys vähennyslasku on harhaanjohtava, kun lasketaan kokonaisluvuilla?

Rationaaliluvut

JOHDANTOESIMERKKI 1

Mikä kokonaisluku toteuttaa yhtälön?

a) $6x = 12$ b) $6x = 4$

Ratkaisu

a) Yhtälön $6x = 12$ toteuttaa kokonaisluku 2, sillä $6 \cdot 2 = 12$.

b) Yhtälöä $6x = 4$ ei toteuta mikään kokonaisluku. Yhtälön toteuttaa rationaaliluku $\frac{4}{6}$, joka voidaan kirjoittaa myös muodossa $\frac{2}{3}$.

Vastaus

a) 2 b) Ei mikään.

Rationaaliluvut

Rationaalilukuja ovat luvut, jotka voidaan merkitä murtolukumuodossa $\frac{m}{n}$, missä osoittaja m ja nimittäjä n ($n \neq 0$) ovat kokonaislukuja.

Rationaalilukujen joukko merkitään kirjaimella $\mathbb{Q}$.

Kaikki kokonaisluvut ovat rationaalilukuja (tehtävä 20). Yleisemmin kaikki luvut, joiden desimaalimuoto on päättyvä tai jaksollinen, ovat rationaalilukuja (tehtävät 20 ja 40). Kääntäen pätee: jokaisen rationaaliluvun desimaalimuoto on päättyvä tai jaksollinen (tehtävä 42).

Rationaalilukujen yhteenlaskulle ja kertolaskulle ovat voimassa samat vaihdanta-, liitäntä- ja osittelulait kuin luonnollisten lukujen yhteen- ja kertolaskulle.

ESIMERKKI 2

Laske a) lukujen $\frac{3}{8}$ ja $\frac{5}{6}$ summa b) lukujen $\frac{5}{14}$ ja $\frac{7}{9}$ tulo
c) lukujen 3 ja $\frac{2}{7}$ tulo.

Ratkaisu

a)

$$\overset{3)}{3} \overset{4)}{+} \frac{5}{6} = \frac{9}{24} + \frac{20}{24}$$

Yhteenlaskettavat lavennetaan samannimisiksi.

$$= \frac{9 + 20}{24}$$

Osoittajaksi tulee osoittajien summa ja nimittäjäksi yhteinen nimittäjä.

$$= \frac{29}{24}$$

Summan arvo voidaan merkitä myös sekalukuna:

$$\frac{29}{24} = 1\frac{5}{24}, \text{ sillä } 29 = 1 \cdot 24 + 5.$$

$$\text{b) } \frac{5}{14} \cdot \frac{7}{9} = \frac{\overset{1)}{5} \cdot \cancel{7}}{\cancel{14} \cdot 9}$$

Tulon osoittajaksi tulee osoittajien tulo ja nimittäjäksi nimittäjien tulo. Ennen kertolaskua supistetaan, jos mahdollista.

$$= \frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 9} = \frac{5}{18}$$

c) Kokonaisluvun ja murtoluvun tulo voidaan laskea niin, että kokonaisluvulla kerrotaan murtoluvun osoittaja.

$$3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7}$$

Seitsemäsosien määrä tulee kolminkertaiseksi.

Voidaan myös saattaa kokonaisluku 3 murtolukumuotoon ja laskea kahden murtoluvun tulo.

$$3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 7} = \frac{6}{7}$$

Vastaus

$$\text{a) } \frac{29}{24} = 1\frac{5}{24} \quad \text{b) } \frac{5}{18} \quad \text{c) } \frac{6}{7}$$

Käänteisluku

Jokaisella nollasta eroavalla rationaaliluvulla on *käänteisluku*. Luvun a käänteisluku merkitään $\frac{1}{a}$. Luvun ja sen käänteisluvun tulo on yksi:

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad (a \neq 0).$$

Luvun $\frac{2}{5}$ käänteisluku on $\frac{5}{2}$, sillä $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 2} = 1$.

Rationaalilukujen osamäärä voidaan aina muuttaa tuloksi:

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b} \quad \text{Jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla.}$$

eli

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

ESIMERKKI 3

Laske $\frac{8}{15} : \frac{6}{7}$.

Ratkaisu

$$\frac{8}{15} : \frac{6}{7} = \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{6}$$

Jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla.

$$= \frac{\overset{4}{\cancel{8}} \cdot 7}{15 \cdot \underset{3}{\cancel{6}}}$$

Supistetaan.

$$= \frac{4 \cdot 7}{15 \cdot 3} = \frac{28}{45}$$

Vastaus

$$\frac{28}{45}$$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

20. Osoita saattamalla luku murtolukumuotoon, että

- a) kokonaisluku -5
 b) päättyvä desimaaliluku $2,17$
 on rationaaliluku. Onko luvulla useampi kuin yksi murtolukumuoto?

21. Laske.

- a) $\frac{1}{6} - \frac{5}{6}$ b) $-\frac{5}{6} + \frac{4}{3}$
 c) $\frac{2}{3} - \frac{2}{5}$ d) $-2 + \frac{3}{5} - \frac{7}{10}$

22. Laske.

- a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{12} \cdot \frac{9}{14}$
 c) $\frac{2}{5} \cdot \left(-1\frac{3}{7}\right)$

23. Laske.

- a) $5 \cdot \frac{2}{13}$ b) $-3 + 6 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)$
 c) $\frac{5}{12} \cdot 6$ d) $-\frac{5}{18} \cdot 4 + 2$

24. Laske kertolaskulla

- a) kolmasosa luvusta $\frac{5}{7}$
 b) neljä viidestoistaosaa luvusta $\frac{5}{12}$
 c) kolme neljäsosaa luvun $\frac{2}{5}$ kuudesosasta.

25. Osamäärä voidaan aina muuttaa tuloksi:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \quad \text{tai} \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a. \quad \text{Muuta tuloksi.}$$

- a) $\frac{100}{7}$ b) $\frac{13}{100}$
 c) $\frac{a}{3}$ d) $-\frac{a}{7}$

26. Merkitse ”neljäsosa luvusta a ”

- a) osamääränä b) tulona.

27. Mikä on luvun käänteisluku?

- a) -4 b) $\frac{3}{7}$
 c) $\frac{1}{5}$ d) $2\frac{1}{5}$

28. Laske.

- a) $\frac{2}{5} : \frac{3}{7}$ b) $\frac{3}{10} : \frac{5}{6}$
 c) $\frac{17}{24} : \frac{1}{6}$

29. Laske.

- a) $\frac{1}{5} : 10$ b) $\frac{2}{3} : (-6)$
 c) $4 : \frac{1}{8}$ d) $-15 : \left(-\frac{3}{10}\right)$

30. Merkitse lauseke ja laske lausekkeen arvo, kun $a = -3$ ja $b = \frac{3}{4}$.

- a) Luvun a vastaluvun ja luvun b käänteisluvun tulo.
 b) Luvun a käänteisluvun ja luvun b vastaluvun osamäärä.
 c) Lukujen a ja b summan ja niiden käänteislukujen summan osamäärä.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

31. Laske.

a) $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$ b) $-2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9}$
 c) $\frac{12}{21} \cdot \frac{14}{16}$ d) $-1\frac{1}{4} \cdot \left(-1\frac{3}{5}\right)$

32. Laske.

a) $9 \cdot \frac{1}{9}$ b) $3 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{12}$
 c) $\frac{2}{9} \cdot 6$ d) $-\frac{5}{12} \cdot (-9) \cdot \left(-\frac{6}{15}\right)$

33. Laske lausekkeen $-3x + 2$ arvo, kun

a) $x = \frac{4}{5}$ b) $x = -\frac{2}{3}$.

34. Laske kertolaskulla viisi kuudesosaa

a) luvusta 10 b) luvusta $\frac{4}{25}$ c) luvun 24 kolmesta kymmenesosasta.

35. Maisa söi 1,8 kilogramman painoisesta kakkusta kuudesosan, Paavo jäljelle jääneestä kakkusta viidesosan ja Veli lopusta kolmasosan. Kuinka paljon kakkua oli vielä syömättä?

36. Merkitse lauseke ”lukujen a ja b käänteislukujen erotus” ja laske lausekkeen arvo, kun

a) $a = \frac{1}{3}$ ja $b = \frac{2}{3}$ b) $a = 5$ ja $b = 1\frac{2}{3}$.

37. Päättele yhtälön ratkaisu.

a) $\frac{1}{x} = \frac{4}{7}$
 b) $\frac{1}{x} = -9$
 c) $\frac{1}{x} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}$

38. Laske.

a) $\frac{2}{5} : \frac{5}{2}$
 b) $1\frac{1}{3} : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$
 c) $\left(1 - \frac{4}{9}\right) : \left(1 + \frac{2}{3}\right)$

39. Laske.

a) $\frac{4}{5} : 6 - 1$ b) $\frac{4}{5} : (6 - 1)$
 c) $-3 + 2 : \frac{2}{3}$ d) $(-3 + 2) : \frac{2}{3}$

40. a) Saata jaksollinen desimaaliluku $q = 0,675675\dots$ murtolukumuotoon seuraavien ohjeiden avulla.

Kerro luku q luvulla 1 000.

Laske erotus $1000q - q$.

Huomaa, että $1000q - q = 999q$, ja ratkaise luvun q murtolukumuoto.

b) Miksi kertojaksi valittiin luku 1 000?

41. Käytä edellisen tehtävän menetelmää ja saata jaksollinen desimaaliluku murtolukumuotoon.

a) 0,6363... b) 0,99...
 c) 5,013013... d) 3,27979...

42. a) Laske jakokulmassa osamäärän $\frac{1}{17}$ arvoa, kunnes saat selville luvun $\frac{1}{17}$ desimaalimuodon jakson. Vaikka jakso ei heti ilmaannu, niin miksi jakolasku alkaa ennen pitkää väistämättä toistaa itseään?

b) Miksi jokaisen murtoluvun $\frac{m}{n}$ desimaalimuoto on, jollei päättyvä, niin ainakin jaksollinen?

43. Luvut 2, 4, 5, 8, 10 ja 16 ovat esimerkkejä positiivisista kokonaisluvuista, joiden käänteisluvulla on päättyvä desimaalimuoto. Esimerkiksi on $\frac{1}{5} = 0,2$ ja $\frac{1}{16} = 0,0625$. Millä positiivisilla kokonaisluvuilla on tämä ominaisuus? Perustele.

44. a) Jos positiivisen kokonaisluvun n käänteisluvun $\frac{1}{n}$ desimaalimuodon jakson pituus on kolme ja jakso alkaa heti pilkusta, niin samalla tavalla kuin tehtävässä 40 nähdään, että $\frac{1}{n} = \frac{p}{999}$, missä luku p on kokonaisluku. Käytä yhtälöä hyväksesi ja päätele kaikki tällaiset luvut n . Minkä muiden positiivisten kokonaislukujen käänteislukujen jakson pituus on kolme?
b) Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut, joiden käänteisluvun desimaalimuodon jakson pituus on neljä.
c) Jos käytössäsi on laskin tai tietokoneohjelma, jolla voidaan jakaa kokonaisluku tekijöihin, niin määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut, joiden käänteisluvun desimaalimuodon jakson pituus on viisi.

Ensimmäisen asteen yhtälö

ESIMERKKI 1

Toteuttaako luku a) 2 b) 3 yhtälön $5x - 4 = 8 + x$?

Ratkaisu

Luku sijoitetaan yhtälöön muuttujan x paikalle.

$$\text{a) } 5 \cdot 2 - 4 = 8 + 2$$

$$10 - 4 = 10$$

$$6 = 10$$

epätosi

Luku 2 ei toteuta yhtälöä.

$$\text{b) } 5 \cdot 3 - 4 = 8 + 3$$

$$15 - 4 = 11$$

$$11 = 11$$

tosi

Luku 3 toteuttaa yhtälön.

Vastaus

a) Ei toteuta. b) Toteuttaa.

Yhtälöä ratkaistaessa on löydettävä kaikki luvut, jotka sijoitettuna muuttujan paikalle tekevät yhtälöstä toden eli toteuttavat yhtälön. Lukuja, jotka toteuttavat yhtälön, sanotaan yhtälön *juuriksi* tai *ratkaisuiksi*.

Ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen

Ensimmäisen asteen yhtälön^{*} ratkaiseminen perustuu seuraaviin lukujen ominaisuuksiin:

Tosi yhtälö pysyy totena ja epätosi yhtälö pysyy epätotena, eli yhtälö säilyy *yhtäpitävänä*,

- jos yhtälön molemmille puolille lisätään tai molemmilta puolilta vähennetään sama luku

$$\begin{array}{ll} 5 = 5 & | + 2 \\ 7 = 7 & \text{Tosi pysyy totena.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 3 = 5 & | - 4 \\ -1 = 1 & \text{Epätosi pysyy epätotena.} \end{array}$$

- jos yhtälön molemmat puolet jaetaan tai kerrotaan samalla nollasta eroavalla luvulla.

$$\begin{array}{ll} 6 = 6 & | : 2 \\ 3 = 3 & \text{Tosi pysyy totena.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} -3 = -2 & | \cdot (-1) \\ 3 = 2 & \text{Epätosi pysyy epätotena.} \end{array}$$

Käyttämällä näitä ominaisuuksia poistetaan yhtälön toiselta puolelta vakiotermit (ne termit, joissa ei ole muuttujaa x tms.) ja toiselta puolelta muuttujan sisältävät termit. Lopuksi jaetaan muuttujan kertoimella.

* Tässä luvussa käsiteltäviä yhtälöitä kutsutaan ensimmäisen asteen yhtälöiksi, koska niissä muuttuja on vain potenssissa yksi (nimittäin on $x^1 = x$). Kurssissa Polynomifunktiot opitaan, kuinka ratkaistaan kaikki toisen asteen yhtälöt, siis yhtälöt, joissa esiintyy myös x^2 .

ESIMERKKI 2

Mikä luku toteuttaa yhtälön $3(x - 2) = 9x - 1$?

Ratkaisu

$$3(x - 2) = 9x - 1$$

Poistetaan sulkeet käyttämällä osittelulakia.

$$3x - 6 = 9x - 1$$

$$| + 6$$

Poistetaan vakiotermi yhtälön vasemmalta puolelta.

$$3x = 9x - 1 + 6$$

$$| - 9x$$

Poistetaan muuttujan sisältävä termi oikealta puolelta.

$$3x - 9x = -1 + 6$$

$$-6x = 5$$

$$| : (-6)$$

Jaetaan muuttujan kertoimella.

$$x = -\frac{5}{6}$$

Yhtälön toteuttaa luku $-\frac{5}{6}$.

Lyhennetty ratkaisutapa. Ratkaisutavan voi kirjata lyhyemmin niin, että siirretään termejä puolelta toiselle ja samalla vaihdetaan termien merkit.

$$3x - 6 = 9x - 1$$

Termi -6 siirretään vasemmalta oikealle ja termi $9x$ oikealta vasemmalle ja samalla vaihdetaan termin etumerkki.

$$3x - 9x = -1 + 6$$

$$-6x = 5$$

$$| : (-6)$$

$$x = -\frac{5}{6}$$

Vastaus

$$-\frac{5}{6}^*$$

* Ratkaisun voi tarkistaa sijoittamalla saadun vastauksen alkuperäiseen yhtälöön. Tarkistuksen voi tehdä myös graafisella laskimella niin, että piirretään yhtälön molempien puolien kuvaajat $y = 3(x - 2)$ ja $y = 9x - 1$ samaan laskimen näyttöön. Yhtälön juuri on kuvaajien leikkauspisteen x -koordinaatti.

ESIMERKKI 3

Ratkaise yhtälö.

a) $4x - 7x + 6 = 3(2 - x)$ b) $x + 1 = x$

Ratkaisu

a)

$$4x - 7x + 6 = 3(2 - x) \quad \text{Poistetaan sulkeet ja yhdistetään samanmuotoiset termit.}$$

$$-3x + 6 = 6 - 3x$$

$$-3x + 3x = 6 - 6$$

$$0 = 0$$

tosi

Yhtälö on aina tosi riippumatta muuttujan x arvosta. Yhtälön toteuttavat kaikki luvut.

b)

$$x + 1 = x$$

$$x - x = -1$$

$$0 = -1$$

epätosi

Yhtälö on aina epätosi riippumatta muuttujan x arvosta. Yhtälöä ei toteuta mikään luku.

Vastaus

a) Yhtälön toteuttavat kaikki luvut.

b) Yhtälöä ei toteuta mikään luku.

ESIMERKKI 4

Ratkaise yhtälö $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} + 6 = x$.

Ratkaisu

Tapa 1. Yhtälön termit lavennetaan samannimisiksi.

$$\overset{5}{\cancel{x}} \frac{1}{2} + \overset{2}{\cancel{x}} \frac{1}{5} + 6 = x$$

$$\frac{5x}{10} + \frac{2x}{10} + \frac{60}{10} = \frac{10x}{10}$$

| · 10

Yhtälö kerrotaan termien yhteisellä nimittäjällä.

$$5x + 2x + 60 = 10x$$

$$7x + 60 = 10x$$

$$60 = 3x$$

| : 3

$$x = 20$$

Tapa 2. Yhtälö kerrotaan sellaisella luvulla, että nimittäjät supistuvat pois.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{5} + 6 = x$$

| · 10

Yhtälön molemmat puolet kerrotaan luvulla 10.

$$\overset{5}{\cancel{10x}} \frac{1}{\cancel{2}} + \overset{2}{\cancel{10x}} \frac{1}{\cancel{5}} + 10 \cdot 6 = 10x$$

Supistaminen poistaa nimittäjät.

$$5x + 2x + 60 = 10x$$

$$7x + 60 = 10x$$

$$60 = 3x$$

| : 3

$$x = 20$$

Vastaus

$$x = 20$$

ESIMERKKI 5

Ratkaise yhtälö $\frac{3x-1}{4} = \frac{1+5x}{3}$.

Ratkaisu

$$\frac{3x-1}{4} = \frac{1+5x}{3}$$

Kerrotaan ristiin tai kerrotaan yhtälö nimittäjien tulolla $4 \cdot 3 = 12$.

$$3(3x-1) = 4(1+5x)$$

$$9x-3 = 4+20x$$

$$9x-20x = 4+3$$

$$-11x = 7 \quad | : (-11)$$

$$x = -\frac{7}{11}$$

Vastaus

$$x = -\frac{7}{11}$$

Kertominen ristiin

Verrannon muotoisesta yhtälöstä $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, missä $b \neq 0$ ja $d \neq 0$, voi poistaa nimittäjät kertomalla ristiin.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$ad = bc$$

Ristiin kertomisen perustelu

Ristiin kertominen on lyhennetty tapa merkitä verrannon muotoisen yhtälön kertominen nimittäjien tulolla:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad | \cdot bd (\neq 0)$$

$$\frac{\overset{1}{a}\cancel{b}d}{\cancel{b}\underset{1}{}} = \frac{\overset{1}{c}b\cancel{d}}{\cancel{d}\underset{1}{}} \quad \text{Supistuu.}$$

$$ad = bc \quad \text{Päädettiin ristiin kertomalla saatuun muotoon.}$$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.

PERUSTEHTÄVIÄ

45. Osoita, että luku 25 toteuttaa yhtälön $11(x + 5) = 15(x - 3)$.

46. Ratkaise yhtälö.

a) $4(3x + 1) = 1 - 8x$

b) $3(2x + 1) - 4 = 9x$

47. Ratkaise yhtälö.

a) $2(x - 5) - x = x + 11$

b) $10(x + 1) = x + 10$

48. Osoita, että yhtälö

$18(1 - x) + 24x = 6(x + 3)$ toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla.

49. Millä vakion a arvoilla $t = 6$ on yhtälön

$$\frac{1}{2}at^2 - 5t = 150 \text{ juuri?}$$

50. Suvikumussa puhelu lankapuhelimesta lankapuhelimeen maksaa 8,2 snt/puhelu ja lisäksi 1,52 snt/minuutti. Kuinka pitkään yhdellä eurolla voi puhua?

51. Elina: ”Olin Kallen ja Eeron kanssa myymässä luokan lehteä. Myimme yhteensä 43 lehteä. Minä myin viisi lehteä enemmän kuin Eero, mutta Kalle myi kaksi kertaa niin paljon kuin minä.” Kuinka monta lehteä kukin myi?

52. Kallen, Eeron ja Elinan kesämökit ovat saman yksityistien varrella. Päätieltä on matkaa tonteille 200 m, 350 m ja 500 m. Vuotuiset 500 euron tienhoitokulut päätetään jakaa näiden matkojen suhteessa. Kuinka suuret ovat tienhoito-osuudet? (Ohje: Merkitse osuuksia $200x$ jne.)

53. Ratkaise yhtälö.

a) $\frac{x}{8} + \frac{x}{4} + \frac{x}{2} + x = 60$

b) $\frac{3x}{2} - \frac{2x}{3} = 10$

54. Ratkaise yhtälö.

a) $\frac{x + 4}{3} = \frac{x + 3}{4}$

b) $\frac{x + 2}{x + 1} = 3$

55. Sheikin kuoleman jälkeen hänen poikansa jakoivat oliiviöljyruukut. Vanhin poika sai puolet ja keskimäinen kolmasosan ruukuista. Nuorimmalle jäi seitsemän ruukkua. Kuinka monta ruukkua vanhin poika sai ja kuinka monta keskimäinen?

56. CD-levyjä myytiin 5,40 euron alennuksella. Ulla laski, että 7 levyä maksoi nyt saman verran kuin 5 levyä normaalihinnalla. Mikä oli alentamaton hinta?

57. Kun mansikoiden kilohinta nousi 0,80 euroa, niin 7,5 kilon laatikosta joutui maksamaan yhden euron enemmän kuin 10 kilon laatikosta ennen hinnannousua. Mikä oli uusi kilohinta?

58. Kuinka pitkä matkan tulee olla, jotta keskinopeuden nostaminen nopeudesta 80 km/h nopeuteen 85 km/h lyhentäisi ajoaikaa viisitoista minuuttia?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

59. Ratkaise yhtälö.

- a) $6(x - 1) - x = 6x - 1$
- b) $1,4(x + 3) = x - 0,6$
- c) $x - 7 = 5(x - 2) + 3$

60. Osoita, että yhtälö

$3(1 - x) - 2 = 4(1 - x) + x$ ei toteudu millään muuttujan x arvolla.

61. Millä vakion r arvoilla $x = -3$ on yhtälön juuri?

- a) $rx + r = -2r + 1$
- b) $2(r + x) = r - rx - 6$

62. A:n piti jakaa korttipakka (52 korttia) tasan neljän pelaajan kesken. Mutta

B: ”Minulla on kaksi korttia vähemmän kuin A:lla.”

C: ”Minulla on kaksi kertaa niin paljon kortteja kuin B:llä.”

D: ”Minulla on aivan oikea määrä kortteja.”

A: ”Hupsis! Yksi kortti on pudonnut lattialle.”
 Kuinka monta korttia kullakin oli?

63. Kolmihenkinen seurue päättää jakaa taksimaksun taksamittarin lukemien suhteessa. Ensimmäisen poistuessa lukema on 7 euroa, seuraavan kotiovella 11 euroa ja perillä kolmannen kotona 23 euroa. Kuinka 23 euron taksimaksu seuraavana päivänä jaettiin?

64. Lomakohteessa on kaksi autonvuokraamoja, jotka tarjoavat samanlaisia autoja erilaisin ehdoin. Vuokraamossa A vuorokausimaksu on 3 000 bahtia ja lisäksi kilometrimaksu 50 bahtia. Vastaavat maksut vuokraamossa B ovat 4 000 bahtia ja 45 bahtia. Kuinka pitkä päivämatka maksaa molemmissa vuokraamoissa yhtä paljon?

65. Kuriiriliike veloittaa paketin pikakuljetuksesta paketin painon mukaan 15 euroa viiteen kilogrammaan saakka ja lisäksi 5 kg:n ylimenevältä osalta 40 snt/kg. Kuinka paljon painoi paketti, jonka pikakuljetus maksoi 28,60 euroa?

66. Ratkaise.

- a) $x + \frac{1}{6} = \frac{2x}{3}$
- b) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{6}$

67. Ratkaise.

- a) $\frac{6x + 1}{3} = \frac{8x - 3}{2}$
- b) $\frac{7}{5x - 4} = 2$

68. Kun Jaakko oli syönyt viidesosan ja Pentti kaksi kolmasosaa maapähkinöistä, muille jäi 44 pähkinää. Kuinka monta pähkinää Jaakko söi ja kuinka monta Pentti?

69. Tilausbussin kustannukset ajateltiin jaettavaksi tasan matkan 21 osanottajan kesken. Lähtijöitä olikin 24, ja matka tuli kullekin 4 euroa halvemmaksi. Kuinka paljon kukin osanottaja joutui lopulta maksamaan?

70. Tyytyväinen autoilija: ”Bensiinin litrahinta on viime viikosta laskenut 16 senttiä niin, että tänään maksoin 55 litrasta tasan neljä euroa vähemmän kuin viime viikolla 51 litrasta.” Mikä on uusi litrahinta?

71. Millä vakion a arvoilla

- a) kaikki luvut toteuttavat yhtälön $x + a + 7(a - x) = 6(1 - x)$
- b) mikään luku ei toteuta yhtälöä $x + a(x - 5) = 3(x - 1)$

72. Murtolukuja ei pidä laskea yhteen seuraavasti: $\frac{3}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3+a}{2+4}$. Millä a :n arvolla kuitenkin näin saadaan oikea tulos?

73. Linja-automatka mummolaan kestää normaalisti 2 h 45 min. Jotta matkaan kuluva aika lyhenisi 15 minuuttia, keskinopeutta pitäisi nostaa 5 km/h. Kuinka pitkä matka mummolaan on?

74. Määritä sekunnin tarkkuudella kello 10:n ja 11:n väliltä se kellonaika, jolloin kellon minuutti- ja tuntiviisari ovat päällekkäin.

Suoraan verrannollisuus

Ongelma

Tuula juoksi 20 minuutissa 4 kilometriä. Täydennä taulukkoon matkat, jotka hän juoksee samalla vauhdilla 10 minuutissa ja 30 minuutissa.

aika (min)	matka (km)
20	4
10	
30	

Suoraan verrannollisuus

Kaksi toisistaan riippuvaa suuretta, jotka muuttuvat samassa suhteessa, ovat *suoraan verrannolliset*.

Taulukossa on toisistaan riippuvien suureiden A ja B toisiaan vastaavat arvot a_1 ja b_1 sekä a_2 ja b_2 .

suure A	suure B
a_1	b_1
a_2	b_2

Jos suureet A ja B ovat suoraan verrannolliset, niin kaikilla arvoil-

la a_1 ja b_1 sekä a_2 ja b_2 on $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

ESIMERKKI 1

Talon ulkoseiniä maalataan. Kun oli maalattu 60 m^2 , maalia oli kulunut yhdeksän litraa. Kuinka paljon maalia tarvitaan lisää, jos maalaamatta on vielä a) 240 m^2 b) 145 m^2 ?

c) Mikä on tarvittavan maalin määrä y , jos maalaamatta on $x \text{ m}^2$?
Piirrä koordinaatistoon kuvaaja, joka havainnollistaa maalin määrän riippuvuutta maalattavasta pinta-alasta.

Ratkaisu

a) Kun maalattavan alueen pinta-ala kaksinkertaistuu, kolminkertaistuu jne, niin myös tarvittavan maalin määrä kaksinkertaistuu, kolminkertaistuu jne. Maalattavan alueen pinta-ala ja tarvittavan maalin määrä ovat suoraan verrannolliset. Koska pinta-ala 240 m^2 on nelinkertainen verrattuna pinta-alaan 60 m^2 , myös maalin tarve on nelinkertainen. Maalia tarvitaan $4 \cdot 9 \text{ l} = 36 \text{ l}$.

b) *Tapa 1.* Ratkaistaan maalin tarve verrantoyhtälön avulla. Merkitään tarvittavan maalin määrää x ja kootaan tiedot taulukkoon.

seinän pinta- ala (m^2)	maalin määrä (l)
60	9
145	x

Seinän pinta-ala ja maalin määrä ovat suoraan verrannolliset, joten

$$\frac{60}{145} = \frac{9}{x}.$$

Ratkaistaan verrantoyhtälö.

$$\frac{60}{145} = \frac{9}{x} \quad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$60 \cdot x = 9 \cdot 145 \quad | : 60$$

$$x = \frac{9 \cdot 145}{60} \approx 22 \text{ (l)}$$

Tapa 2. Päätellään suoraan, kuinka maalin tarve riippuu seinän pinta-alasta.

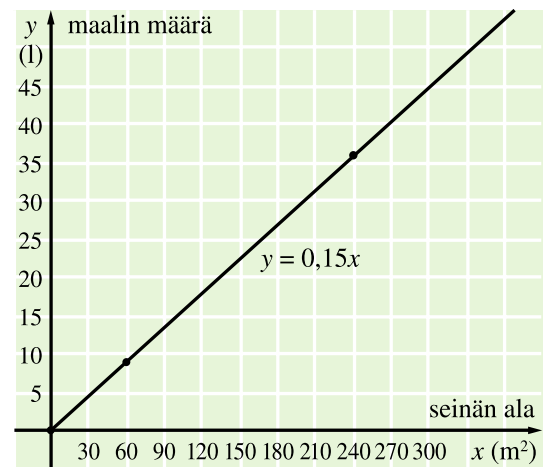
Koska 60 m^2 :n maalaamiseen tarvittiin 9 litraa maalia, niin yhden neliömetrin maalaamiseen tarvitaan $\frac{9}{60} = 0,15$ litraa maalia. Kun maalattava pinta-ala on 145 m^2 , niin maalin tarve on $145 \cdot 0,15 \text{ litraa} \approx 22 \text{ litraa}$.

c) Yhden neliömetrin maalaamisen tarvitaan $\frac{9}{60} = 0,15$ litraa maalia. Jos seinän pinta-ala on x neliometriä, niin maalin tarve litroina on $y = 0,15x$.

Piirretään yhtälön $y = 0,15x$ kuvaaja koordinaatistoon. Koordinaatiston vaaka-akselilla on seinän pinta-ala x ja pystyakselilla maalin määrä y . Kuvaaja kulkee muun muassa pisteiden $(60, 9)$ ja $(240, 36)$ kautta. Lisäksi, kun $x = 0$, niin $y = 0,15 \cdot 0 = 0$, joten kuvaaja kulkee pisteen $(0, 0)$ kautta.

seinän pinta-ala (m^2) x	maalin määrä (l) $y = 0,15x$	kuvaajan piste (x, y)
0	0	(0, 0)
60	9	(9, 60)
240	36	(240, 36)

Kuvaaja on origosta alkava puolisuora.



Vastaus

a) 36 l

b) 22 l

c) $y = 0,15x$

Suoraan verrannollisuus yhtälönä

Jos suureet A ja B ovat suoraan verrannolliset, niin suureen B arvon y riippuvuuden suureen A arvosta x ilmaisee yhtälö, joka on muotoa $y = kx$.

Kerroin k on niin sanottu *verrannollisuuskerroin*.

Perustelu

Oletetaan, että suureet A ja B ovat suoraan verrannolliset ja että a_1 ja b_1 ovat eräät toisiaan vastaavat suureiden A ja B arvot.

suure A	suure B
a_1	b_1
x	y

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan y .

$$\frac{a_1}{x} = \frac{b_1}{y} \quad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$a_1 y = b_1 x \quad | : a_1$$

$$y = \frac{b_1}{a_1} x$$

$$\text{Siis } y = kx, \text{ missä } k = \frac{b_1}{a_1}.$$

ESIMERKKI 2

Auton pysähtymiseen tarvittava jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön, jos keliolot ovat samanlaiset. Heidi kokeili sora-tiellä jarrutusta ja huomasi, että nopeudesta 20 km/h auto pysähtyi 2,8 metrin matkalla. Kuinka pitkä jarrutusmatka on, jos nopeus on 70 km/h?

Ratkaisu

Luvun neliö tarkoittaa luvun toista potenssia.

Tapa 1. Ratkaistaan jarrutusmatka verrantoyhtälön avulla.

Suoraan verrannolliset suureet ovat nopeuden neliö ja jarrutusmatka. Merkitään ne taulukkoon. Kysyttyä jarrutusmatkaa on merkitty kirjaimella s .

nopeus ²	jarrutusmatka
20^2	2,8
70^2	s

Suoraan verrannolliset suureet muuttuvat samassa suhteessa.

$$\frac{20^2}{70^2} = \frac{2,8}{s} \quad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$20^2 \cdot s = 2,8 \cdot 70^2 \quad | : 20^2$$

$$s = \frac{2,8 \cdot 70^2}{20^2} \approx 34 \text{ (m)}$$

Tapa 2. Ilmaistaan jarrutusmatkan riippuvuus nopeudesta yhtälön avulla.

Merkitään nopeutta (yksikkönä km/h) kirjaimella v ja jarrutusmatkaa (yksikkönä m) kirjaimella s . Jarrutusmatka s on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön v^2 , joten

$$s = kv^2,$$

missä k on verrannollisuuskerroin.

Ratkaistaan verrannollisuuskerroin k annettujen tietojen perusteella. Sijoitetaan yhtälöön $s = kv^2$ tunnetut arvot $s = 2,8$ ja $v = 20$.

$$2,8 = k \cdot 20^2 \quad | : 20^2$$

$$k = \frac{2,8}{20^2} = 0,007$$

Nopeuden v ja jarrutusmatkan s välillä vallitsee siis riippuvuus

$$s = 0,007v^2.$$

Sijoitetaan $v = 70$.

$$s = 0,007 \cdot 70^2 \approx 34 \text{ (m)}$$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

75. Pohdi, kuinka toinen suure muuttuu, kun toinen suure kaksinkertaistuu, kolminkertaistuu, puolittuu jne. Ovatko suureet suoraan verrannolliset?

- a) kuljettu matka ja kulunut aika, kun keskinopeus pysyy samana
- b) kananmunien lukumäärä ja niiden kovaksi keittämiseen tarvittava keittoaika
- c) hedelmätiskiltä valitun vesimelonin paino ja hinta
- d) neliön sivun pituus ja neliön pinta-ala

76. Kolmeen annokseen pastakastiketta tarvitaan 200 grammaa tonnikalaa. Kuinka paljon tonnikalaa tarvitaan kahdeksaan annokseen?

77. Australian matkaaaja sai 150 eurolla 240 Australian dollaria.

- a) Paita maksoi 19,90 dollaria. Mikä oli paidan hinta euroina?
- b) Matkaaaja ostaa vielä x dollaria. Mikä on niiden hinta h euroina? Havainnollista koordinaatistossa hinnan h riippuvuutta dollarien määräästä x .

78. Neliön muotoinen lasi, jonka sivun pituus on 2,00 m, painaa 16,3 kg. Samanlaisesta lasista tehty ikkunaruutu oli särkynyt ja sirpaleet painoivat 6,32 kg. Mikä oli särkyneen lasin pinta-ala?

79. Jos jarrutusolot ovat samanlaiset, niin auton pysähtymiseen tarvittava jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Kuivalla asfaltilla eräs auto pysähtyi nopeudesta 80 km/h 30 metrin matkalla.

- a) Kuinka pitkä jarrutusmatka vähintään tarvitaan auton pysäyttämiseen nopeudesta 50 km/h?
- b) Ilmaise yhtälöllä jarrutusmatkan s riippuvuus nopeudesta v . Laske yhtälön avulla jarrutusmatkan pituus, jos nopeus on 30 km/h, 100 km/h tai 150 km/h.

80. Ilmastointipuhaltimen tehontarve on suoraan verrannollinen puhalletun ilmamäärän kuu-tioon (kolmanteen potenssiin). Kun teho on 1 500 wattia, huoneisiin saadaan 14 litraa ilmaa sekunnissa. Kuinka alhaiseksi koneen teho voidaan alentaa, jos 10 litraa sekunnissa riittää?

81. Pallon pinta-ala lasketaan kaavalla

$$A = 4\pi r^2 \text{ ja pallon tilavuus kaavalla } V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Millä tavalla pallon a) pinta-ala b) tilavuus on verrannollinen pallon säteeseen? Mikä on verrannollisuuskerroin?

82. Vieterijousen venymä on suoraan verrannollinen jousesta riippuvan esineen painoon, kunhan paino ei ole liian suuri. (Tähän perustuvat mm. kalastajien käyttämien yksinkertaisten jousivaakojen asteikot.) Jousivaa'an jousen pituus ilman painoa oli 80 mm. Kun vaakaan ripustettiin 400 gramman paino, jousi venyi 30 mm.

- a) Ilmaise yhtälön avulla jousen kokonaispituuden y (mm) riippuvuus ripustetun esineen painosta.

Kuinka paljon painaa hauki, joka venyttää jousen kokonaispituudeksi

- b) 150 mm c) 300 mm?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

83. Puuro-ohjeen mukaan litraan kiehuvaan vettä sekoitetaan 3,5 dl suurimoita. Pekka mitasi kattilaan seitsemän kupillista vettä. Kuinka monta kupillista tarvitaan suurimoita?

84. 96 kilometrin matkaan meni aikaa 1 h 10 min. Kuinka pitkä aika menisi samalla nopeudella 120 kilometrin matkaan?

85. 2,4 kg perunoita maksoi 1,80 euroa. Ilmaise yhtälön avulla perunaerän hinnan y (euroa) riippuvuus erän painosta x (kg). Piirrä kuvaaja.

86. Moottorilla, jonka teho on 91 kW, automalli saavutti huippunopeuden 180 km/h. Kuinka paljon tehokkaampi moottorin tulisi olla, jotta auton huippunopeus olisi 200 km/h? Huippunopeuteen tarvittava teho on suoraan verrannollinen nopeuden kuutioon (kolmanteen potenssiin).

87. Raakatimantin arvo on suoraan verrannollinen timantin massan neliöön. 48 karaatin raakatimanti, jonka arvo oli 5 800 euroa, lohkesi hitaasti ryhdyttyä kahdeksi palaksi, joiden massa oli 15 karaattia ja 33 karaattia. Kuinka paljon timantin arvo pieneni? (Timantin massan yksikkönä käytettävä karaatti on 0,2 grammaa. Sana karaatti tulee Johanneksen leipäpuun kreikkankielisestä nimestä keration ja karaatin suuruus puun siemenen massasta, sillä timantteja on muinoin punnittu Johanneksen leipäpuun siemenillä.)

88. Tuulivoimalasta saatava teho on suoraan verrannollinen tuulen nopeuden kuutioon. Kun heikko tuuli puhalsi nopeudella 3,2 m/s, pienestä tuulivoimalasta saatiin tehoa 75 W.

a) Kuinka suuri teho on kovalla tuulella 12 m/s?

b) Ilmaise tehon P riippuvuus tuulen nopeudesta v yhtälön avulla. Käytä yhtälöä ja laske tehon suuruus myrskytuulella 21 m/s.

c) Kuinka paljon teho lisääntyy, kun tuulen nopeus kasvaa nopeudesta 4 m/s nopeuteen 5 m/s? Entä kuinka paljon teho lisääntyy, kun nopeus kasvaa nopeudesta 25 m/s nopeuteen 26 m/s?

89. Auton pysähtymiseen tarvittava jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Märällä asfaltilla eräs auto pysähtyi nopeudesta 60 km/h 24 metrin matkalla. Kuinka pitkä matka vähintään tarvitaan samalla kelillä hiljentämään

a) nopeudesta 120 km/h nopeuteen 60 km/h

b) nopeudesta 200 km/h nopeuteen 120 km/h?

90. Ns. Poiseuillen säännön mukaan verimäärä, jonka verisuoni kuljettaa aikayksikössä, on suoraan verrannollinen verenpaineeseen ja suoraan verrannollinen suonien säteen neljänteen potenssiin. Jos kolesteroli tukkeuttaa suonien säteen 1,4 millimetristä 1,2 millimetriin, niin kuinka korkeaksi verenpaineen tulee nousta normaalista 150 yksiköstä ($100 + \text{ikä}$), jotta suonien kuljetettavan veren määrä pysyisi samana?

Kääntäen verrannollisuus

Ongelma

Kun Tuula juoksee koulumatkansa tasaisella nopeudella 12 km/h, aikaa kuluu 30 minuuttia. Täydennä taulukkoon ajat, jotka kuluvat samaan matkaan, kun Tuula kävelee nopeudella 6 km/h ja pyöräilee nopeudella 30 km/h.

nopeus (km/h)	aika (min)
12	30
6	
30	

Kun kaksi toisistaan riippuvaa suuretta muuttuu niin, että toisen kaksinkertaistuessa toinen puolittuu, toisen kolminkertaistuessa toinen pienenee kolmasosaan jne., suureiden sanotaan olevan kääntäen verrannolliset.

Kääntäen verrannollisuus

Kaksi toisistaan riippuvaa suuretta, jotka muuttuvat käänteisessä suhteessa, ovat *kääntäen verrannolliset*.

Taulukossa on toisistaan riippuvien suureiden A ja B toisiaan vastaavat arvot a_1 ja b_1 sekä a_2 ja b_2 .

suure A	suure B
a_1	b_1
a_2	b_2

Jos suureet A ja B ovat kääntäen verrannolliset, niin kaikilla arvoilla a_1 ja b_1 sekä a_2 ja b_2 on

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}.$$

ESIMERKKI 1

Kirjekuorien täyttämiseen ja postimerkkien nuolemiseen kului seitsemältä oppilaalta kahdeksan tuntia. Kuinka suuri oppilasryhmä tarvitaan, jotta toinen samanlainen postitusurakka valmistuisi

- a) kahdessa tunnissa
- b) kolmessa tunnissa?
- c) Mikä on tarvittavien oppilaiden lukumäärä n , jos työn halutaan valmistuvan t tunnissa? Piirrä käyrä, joka havainnollistaa oppilaiden lukumäärän n riippuvuutta valmistumisajasta t .

Ratkaisu

a) Jotta työhön kuluva aika puolittuisi, tarvitaan kaksinkertainen määrä oppilaita. Jotta aika pienenesi kolmasosaan, tarvitaan kolminkertainen määrä oppilaita jne. Oppilaiden määrä ja työn kesto ovat kääntäen verrannolliset. Koska kaksi tuntia on neljäsosa kahdeksasta tunnista, oppilasmäärän tulee olla nelinkertainen. Tarvitaan $4 \cdot 7 = 28$ oppilasta.

b) *Tapa 1.* Ratkaistaan tarvittava oppilaiden määrä verrantoyhtälön avulla.

Merkitään tarvittavaa oppilaiden lukumäärää kirjaimella n ja kootaan tiedot taulukkoon.

työn kesto (h)	oppilaiden määrä
8	7
3	n

Valmistumisaika ja oppilaiden määrä ovat kääntäen verrannolliset,

$$\text{joten } \frac{8}{3} = \frac{n}{7}.$$

Ratkaistaan yhtälöstä n .

$$\frac{8}{3} = \frac{n}{7}$$

Kerrotaan ristiin.

$$3n = 8 \cdot 7 \quad | : 3$$

$$n = \frac{8 \cdot 7}{3} \approx 18,7$$

Tarvitaan 19 oppilasta.

Tapa 2. Koska seitsemältä oppilaalta meni työurakan tekemiseen kahdeksan tuntia, urakan valmistuminen vaatii yhteensä $7 \cdot 8 = 56$ oppilastyötuntia*. Jos työn halutaan valmistuvan kolmessa tunnissa, tarvittava oppilaiden määrä on

$$\frac{56}{3} \approx 18,7.$$

Tarvitaan 19 oppilasta.

c) Urakan valmistuminen vaatii 56 oppilastyötuntia. Jos urakan halutaan valmistuvan t tunnissa, niin tarvittava oppilaiden määrä on

$$n = \frac{56}{t}.$$

Piirretään yhtälön $n = \frac{56}{t}$ kuvaaja koordinaatistoon, jonka vaaka-akselilla on työn kesto t ja pystyakselilla tarvittava oppilaiden määrä n .

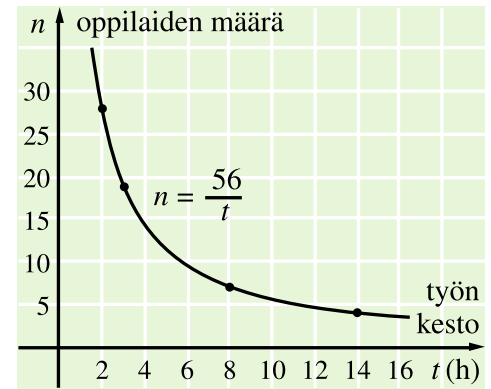
Kuvaaja kulkee pisteiden $(8, 7)$, $(2, 28)$ ja $(3; 18,7)$ kautta. Lasketaan vielä yksi piste: kun $t = 14$, niin $n = \frac{56}{14} = 4$.

työn kesto t (h)	oppilaiden määrä $n = \frac{56}{t}$	kuvaajan piste (t, n)
2	28	$(2, 28)$
3	18,7	$(3; 18,7)$
8	7	$(8, 7)$
14	4	$(14, 4)$

Koordinaatistolle valitaan sopiva jaotus ja piirretään kuvaaja tunnettujen pisteiden avulla.

* Tällaisia yksikköjä käytetään, kun kuvataan erilaisten työprojektien suuruutta. Kun esimerkiksi ilmoitetaan, että rakennusprojektin valmistuminen vaatii 600 henkilötyövuotta, niin projekti työllistää 300 työntekijää kahdeksi vuodeksi tai 200 työntekijää kolmeksi vuodeksi jne.

Kuvaaja on laskeva käyrä, tyyppiltään niin sanottu *hyperbeli*.



Vastaus

- a) 28 oppilasta b) 19 oppilasta c) $n = \frac{56}{t}$

Kääntäen verrannollisuus yhtälönä

Jos suureet A ja B ovat kääntäen verrannolliset, niin suureen B arvon y riippuvuuden suureen A arvosta x ilmaisee yhtälö, joka on muotoa

$$y = \frac{k}{x},$$

missä k on verrannollisuuskerroin.

Perustelu

Oletetaan, että suureet A ja B ovat kääntäen verrannolliset ja että a_1 ja b_1 ovat eräät toisiaan vastaavat suureiden A ja B arvot.

suure A	suure B
a_1	b_1
x	y

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan y .

$$\frac{a_1}{x} = \frac{y}{b_1} \quad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$yx = a_1 b_1 \quad | : x$$

$$y = \frac{a_1 b_1}{x}$$

Siis $y = \frac{k}{x}$, missä $k = a_1 b_1$.

ESIMERKKI 2

Sairaala fyysikko mittasi säteilylähteen neutronisäteilyä 0,80 metrin etäisyydeltä. Mittalaite havaitsi 24 neutronia sekunnissa. Tämä ns. neutronivuo on kääntäen verrannollinen säteilylähteen etäisyyden neliöön. Kuinka suuri neutronivuo on 3,0 metrin etäisyydellä säteilylähteestä?

Ratkaisu

Tapa 1. Ratkaistaan neutronivuo verrantoyhtälön avulla.

Kääntäen verrannolliset suuret ovat säteilylähteen etäisyyden neliö ja neutronivuo. Merkitään ne taulukkoon. Neutronivuota 3,0 metrin etäisyydellä merkitään x .

etäisyys ²	neutronivuo
0,80 ²	24
3,0 ²	x

Kääntäen verrannolliset suuret muuttuvat käänteisessä suhteessa.

$$\frac{0,80^2}{3,0^2} = \frac{x}{24} \quad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$3,0^2 x = 24 \cdot 0,80^2 \quad | : 3,0^2$$

$$x = \frac{24 \cdot 0,80^2}{3,0^2} \approx 1,7$$

Neutronivuo 3,0 metrin etäisyydellä säteilylähteestä on 1,7 neutronia sekunnissa.

Tapa 2. Ilmaistaan neutronivuon riippuvuus säteilylähteen etäisyydestä yhtälön avulla.

Merkitään etäisyyttä x ja neutronivuon suuruutta y . Neutronivuo y on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön, joten

$$y = \frac{k}{x^2},$$

missä k on verrannollisuuskertoimen.

Ratkaistaan verrannollisuuskertoimen k arvo annettujen tietojen perusteella. Sijoitetaan yhtälöön $x = 0,80$ ja $y = 24$.

$$24 = \frac{k}{0,80^2} \quad | \cdot 0,80^2$$

$$k = 24 \cdot 0,80^2 = 15,36$$

Siis etäisyyden x ja neutronivuon y välillä on riippuvuus

$$y = \frac{15,36}{x^2}.$$

Sijoitetaan $x = 3,0$.

$$y = \frac{15,36}{3,0^2} \approx 1,7$$

Neutronivuo 3,0 metrin etäisyydellä säteilylähteestä on 1,7 neutronia sekunnissa.

Vastaus

1,7 neutronia sekunnissa

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

91. Ovatko suureet suoraan tai kääntäen verrannolliset?

- a) keskinopeus ja kulunut aika, kun matka on sama
- b) keskinopeus ja kuljettu matka, kun aika on sama
- c) polkupyörän hinnasta tingityn alennuksen suuruus ja jäljelle jäävä maksettava hinta
- d) polttoaineen litrahinta ja 20 eurolla saatava polttoaineen määrä

92. Urakoitsija arvioi soran kuljetuksen kestävän 17 työpäivää, jos käytössä on 9 m^3 :n lava. Kuinka kauan työ kestäisi 12 m^3 :n lavaa käyttäen? Oletetaan, että lavojen täyttäminen sujuu samassa ajassa.

93. Puutarhuri leikkaa nurmialueen viidessä tunnissa ruohonleikkurilla, jonka leikkausleveys on 60 cm.

- a) Puutarhuri haaveilee uudesta leikkurista, jonka nopeus on sama ja leveys 75 cm. Kuinka kauan nurmialueen leikkaaminen kestäisi tällä uudella leikkurilla?
- b) Mikä on leikkaamiseen kuluva aika t tunteina, jos leikkurin leveys on s cm? Havainnollista ajan t riippuvuutta leikkurin leveydestä s koordinaatistossa.

94. Valaistus on kääntäen verrannollinen valonlähteen etäisyyden neliöön. Valaistus 1,3 metrin etäisyydellä lampusta on 60 luksia. Kuinka suuri valaistus on 2,5 metrin etäisyydellä? Ilmaise valaistuksen v (luksia) riippuvuus etäisyydestä d (metriä) myös yhtälön avulla.

95. Kameran valotusta säädellään muuttamalla ns. aukkoa ja valotusaikaa. Aukko ilmaistaan ns. f -luvulla (1,4, 2, 2,8, 4 jne) ja valotusaika sekunteina ($1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{30}, \frac{1}{60}, \frac{1}{125}$ jne.).

Kun valaistusolot säilyvät samoina, niin kameran objektiivin läpi aikayksikössä kulkevan valon määrä on kääntäen verrannollinen f -luvun neliöön.

- a) Kuinka tiettyssä ajassa objektiivin läpi kulkevan valon määrä muuttuu, kun aukko muutetaan 5,6:sta 16:een? (Ohje: Merkitse aukolla 5,6 kulkevan valon määrää esimerkiksi kirjaimella a).
- b) Oletetaan, että aukoksi on alun perin valittu 5,6 ja valotusajaksi $1/500$ s. Mikä pitää valita uudeksi valotusajaksi, jos aukko muutetaan 16:een ja halutaan, että valotus säilyy yhtä suurena?

96. Nopeusrajoitusta noudattaen matka taittuu 45 minuutissa. Ajamalla 10 km/h :n ylinopeutta ”säästää” tasan 5 minuuttia. Mikä on nopeusrajoitus?

97. Ohjelmointiprojektien suunnittelussa käytetään joskus sääntöä, jonka mukaan vaativan ohjelmointiprojektin suuruus (yksikkönä ohjelmointijakuukausi) on kääntäen verrannollinen projektin toteuttamisajan neliöön. Erään projektin oli alunperin arvioitu valmistuvan 18 kuukaudessa 24 ohjelmoijan voimin. Montako ohjelmoijaa tarvittiin lisää, kun kilpailutilanteen takia projekti päätettiin toteuttaa 16 kuukaudessa?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

98. Rautatiematka Helsingistä Hämeenlinnaan kestää nykyisin 1 h 5 min keskinopeudella 100 km/h.

- a) Sata vuotta sitten aika oli kolminkertainen. Mikä keskinopeus silloin oli?
 b) Millä keskinopeudella matka menisi 50 minuutissa?

99. Matka mummolaan kesti 40 minuuttia, kun ajettiin nopeudella 100 km/h. Kuinka kauan matka kestää nyt, kun koko matkalla on nopeusrajoitus 80 km/h?

100. Kaksi miestä kaivoi ojan kahdeksassa tunnissa.

- a) Kuinka pitkä aika saman ojan kaivamiseen menisi viideltä mieheltä?
 b) Mikä on ojan kaivamiseen kuluva aika t (tunteina), jos työssä on n miestä? Havainnollista koordinaatistossa ajan t riippuvuutta miesten lukumäärästä n .

101. Samasta materiaalista tehtyjen yhtä paksujen ja yhtä kireiksi jännitettyjen soittimen kielten värähtelytaajuus on kääntäen verrannollinen kielen pituuteen. Kitaran 64,8 cm pitkä kieli oli viritetty soimaan H-säveltä eli värähtelemään taajuudella 247 hertsiä (värähdystä sekunnissa). Mistä kohdasta kieltä tulee painaa, kun halutaan soittaa E-sävel, jonka värähtelytaajuus on 330 hertsiä?

102. Kuussa taivas on päivälläkin musta. Maassa taivas ei ole musta, koska ilmakehän molekyylit sirottavat Auringon valoa. Puhtaassa kuivassa ilmassa sironnan voimakkuus on kääntäen verrannollinen valon aallonpituuden neljänteen potenssiin. Näkyvän valon ääripäissä violetin valon aallonpituus on 400 nm (nanometriä) ja punaisen 700 nm. Merkitään punaisen valon sironnan voimakkuutta luvulla yksi. Kuinka voimakasta on violetin valon sironta?

103. Painovoima on kääntäen verrannollinen maapallon keskipisteestä mitatun etäisyyden neliöön. Merenpinnan korkeudella tämä etäisyys on noin 6 370 km. Leena punnittiin rannikolla merenpinnan tasalla ja jousivaaka näytti 70,0 kg. Mitä lukemaa sama vaaka näyttää vuoristossa 5,2 kilometriä merenpinnan yläpuolella?

104. Asunnonvälittäjä määrittää radanvarren lähiössä sijaitsevan asunnon vuokran ensin asunnon iän, kunnon ja varustelun perusteella ja lisää näin laskettuun vuokraan niin sanotun etäisyyslisän, joka on kääntäen verrannollinen etäisyyteen keskustasta.

- a) Erään 14 km:n etäisyydellä keskustasta sijaitsevan asunnon vuokra on 20 euroa/m². Kahdeksan kilometriä kauempana sijaitsevan samanlaisen asunnon vuokra on 18 euroa/m². Kuinka suuri etäisyyslisä vuokriin sisältyy?
 b) Mikä olisi samanlaisen asunnon vuokra seitsemän kilometrin päässä keskustasta?

105. Lankun kantokyky on suoraan verrannollinen lankun leveyteen, suoraan verrannollinen lankun paksuuden neliöön ja kääntäen verrannollinen lankun pituuteen. Kokeellisesti selvitetiin, että 3,00 m pitkä, 10,0 cm leveä ja 5,0 cm paksu lankku kantoi 170 kg.

- a) Kuinka suuren massan samanlaisesta puusta sahattu 4,00 m pitkä, 15,0 cm leveä ja 10,0 cm paksu lankku kantaa?
 b) Kuinka leveä 2,00 m pitkän ja 2,0 cm paksun laudan tulisi olla, jotta lauta kantaisi 100 kg?

Prosenttilaskennan kertaus ja täydennys

Luku on jaettu neljään osaan: Perustilanteet, Vertaaminen prosenteilla ja prosenttilukujen vertaaminen, Muuttuneen arvon laskeminen ja Prosenttilausekkeet. Näistä etenkin kolme ensimmäistä tukevat itsenäistä kertaamista. Jokaisen osan päättää sarja perustehtäviä. Luvun päättää kokoava tehtäväsarja.

Prosentti

Suhteelliset osuudet ilmaistaan usein sadasosina eli prosentteina. Näin osuudet saadaan havainnollisiksi ja helpommin vertailtaviksi.

Prosentti on sadasosa.

$$1 \% = \frac{1}{100} = 0,01^*$$

ESIMERKKI 1

Ilmaise prosentteina a) 0,09 b) 0,074 c) 2,4.

Ratkaisu

a) $0,09 = 9 \%$

↑
sadasosat

Desimaaliluku 0,09 tarkoittaa yhdeksää sadasosaa.

b) $0,074 = 7,4 \%$

↑
sadasosat

c) $2,4 = 2,40 = 240 \%$

↑
sadasosat

Vastaus

a) 9% b) $7,4 \%$ c) 240%

* Prosentti on englanniksi *percent*, ranskaksi *pour cent*, saksaksi *Prozent*. Alkuperäinen latinan ilmaisu *pro centum* on säilynyt sananmukaisena ranskassa: sadalta, sataa kohti. Myös suomessa on aikaisemmin käytetty ilmauksia kuten ”viisi sadalta”.

PERUSTILANTEET

Prosenttiluvun laskeminen

ESIMERKKI 2

1 674 euron bruttopalkasta pidätettiin veroa 512 euroa. Kuinka monta prosenttia palkasta meni veroihin?

Ratkaisu

Veron suhde bruttopalkkaan on $\frac{512}{1674}$.

Lasketaan laskimella suhteen desimaalimuoto, josta luetaan prosenttien sadasosien määrä.

$$\frac{512}{1674} \approx 0,306 = 30,6 \%$$

Vastaus

30,6 %

Kuinka monta prosenttia luku a on luvusta b ?

Kun lasketaan, kuinka monta prosenttia luku a on luvusta b , niin suhde $\frac{a}{b}$ muutetaan prosenteiksi (sadasosiksi). Prosenttien (sadasosien) määrän näkee yleensä helpoimmin suhteen desimaalimuodosta.

Määrän laskeminen

ESIMERKKI 3

Vuoden 2004 verotuksessa määritettiin vuonna 2002 ostetun auton verotusarvoksi 35 % auton hankintahinnasta. Mikä oli 21 700 euroa maksaneen auton verotusarvo?

Ratkaisu

On laskettava, kuinka paljon on 35 sadasosaa luvusta 21 700. Murto-osa lasketaan kertolaskulla, jolloin 35 % voidaan ilmaista murtolukuna:

$$\frac{35}{100} \cdot 21\,700 = 7\,595 \text{ (euroa)} \quad 35 \% = \frac{35}{100}$$

tai yksinkertaisemmin desimaalilukuna:

$$0,35 \cdot 21\,700 = 7\,595 \text{ (euroa)}. \quad 35 \% = 0,35$$

Vastaus

7 595 euroa

Kuinka paljon on p prosenttia luvusta a ?

Kun lasketaan, kuinka paljon on p prosenttia luvusta a , niin p % ilmaistaan desimaalilukuna, jolla kerrotaan luku a .

Perusarvon ratkaiseminen

ESIMERKKI 4

Hannan nettopalkka 26 prosentin veronpidätyksen jälkeen oli 996,78 euroa. Kuinka suuri Hannan bruttopalkka oli?

Ratkaisu

Merkitään tuntematonta bruttopalkkaa kirjaimella x .
Koska veronpidätys on 26 % bruttopalkasta, nettopalkka on $100 \% - 26 \% = 74 \%$ bruttopalkasta x .

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$0,74x = 996,78 \quad | : 0,74 \quad \text{Yhtälö ilmaisee, että } 74 \% \text{ bruttopalkasta } x \text{ on } 996,78.$$

$$x = \frac{996,78}{0,74} = 1\,347 \text{ (euroa)}$$

Vastaus

1 347 euroa

Perusarvon ratkaiseminen

Jos tiedetään määrästä lasketun prosenttiosuuden suuruus, niin koko määrä (perusarvo) saadaan selville yhtälön avulla.

TEHTÄVIÄ

106. Ilmaise desimaalilukuna.

- a) 36 % b) 90 %
- c) 9 % d) 100 %
- e) 4,75 % f) 115 %
- g) 0,35 %

107. Peruskoulun yhdeksänsien luokkien 96 oppilaasta 59 siirtyi lukioon ja 33 ammatillisiin oppilaitoksiin. Kuinka monta prosenttia oppilaista siirtyi lukioon ja kuinka monta prosenttia ammatillisiin oppilaitoksiin?

108. Malmierä, joka painaa 120 kg, sisältää 250 grammaa kuparia. Mikä on malmin kuparipitoisuus?

109. Pankki maksaa vuoden määräaikaisesta talletuksesta korkoa 4,25 %. Kuinka paljon korkoa saa 37 000 euron talletuksesta?

110. Kaivoksen malmin kuparipitoisuus on 1,4 %. Malmia louhitaan vuodessa 2,3 miljoonaa tonnia. Kuinka paljon saadaan kuparia?

111. Kunnallisvaaleissa äänesti 69,1 % kunnan 28 691 äänioikeutetusta. Kuinka moni äänioikeutettu ei käynyt äänestämässä?

112. Pankkitilillä olevasta talletuksesta maksetaan korkoa 4,50 % vuodessa. Kuinka paljon rahaa pitää tilillä olla, jotta korko olisi 720 euroa?

113. Juomatiivisteiden sokeripitoisuus on 18,5 %. Kuinka suureen tiivistemäärään riittää 300 kg sokeria?

114. Tilastokeskuksen mukaan marraskuussa 2003 työttömien lukumäärä oli 229 000 ja työttömyysaste oli 8,9 %. Kuinka paljon oli työllisiä?

115. a) Kolmeen kilogrammaan kuusiprosenttista suolaliuosta lisätään yksi litra (kilogramma) vettä. Mikä on uuden liuoksen suolapitoisuus?

b) Kahteen kilogrammaan 12-prosenttista suolaliuosta liuotetaan 400 g suolaa. Mikä on uuden liuoksen suolapitoisuus?

c) Kahteen kilogrammaan kahdeksanprosenttista suolaliuosta lisätään kilogramma neljäprosenttista liuosta. Kuinka monta grammaa uudessa liuoksessa on suolaa? Mikä on uuden liuoksen suolapitoisuus?

VERTAAMINEN PROSENTEILLA JA PROSENTTILUKUJEN VERTAAMINEN

Muutosprosentti

ESIMERKKI 5

Palkka nousi 1 628 eurosta 1 691 euroon. Kuinka monta prosenttia palkankorotus oli?

Ratkaisu

Tapa 1. Lasketaan ensin palkan muutoksen suuruus.

$$1\,691\text{ €} - 1\,628\text{ €} = 63\text{ €}$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia palkan muutos on korotusta edeltävästä palkasta.

$$\frac{63}{1628} \approx 0,039 = 3,9\% \quad \text{Nimittäjänä on muutosta edeltävä arvo.}$$

Tapa 2. Lasketaan suoraan, kuinka monta prosenttia uusi palkka on muutosta edeltävästä palkasta.

$$\frac{1691}{1628} \approx 1,039 = 103,9\% \quad \begin{array}{l} \text{Nimittäjänä on muutosta edeltävä arvo.} \\ \text{Koska palkka on noussut, tulos on yli 100 \% .} \end{array}$$

Muutosta edeltävää arvoa vastaa 100 %.

$$\text{Palkka on noussut } 103,9\% - 100\% = 3,9\%.$$

Tällä tavalla selviää yleensä yksinkertaisemmalla laskulla.

Vastaus

3,9 %

Vertailuprosentti

ESIMERKKI 6

Vuonna 2003 Yhdysvaltain väkiluku oli 290,3 miljoonaa ja Venäjän 144,5 miljoonaa. Laske prosentin kymmenesosan tarkkuudella,
 a) kuinka monta prosenttia Venäjän väkiluku oli Yhdysvaltain väkilukua pienempi
 b) kuinka monta prosenttia Yhdysvaltain väkiluku oli Venäjän väkilukua suurempi.

Ratkaisu

a) Lasketaan ensin, kuinka monta prosenttia Venäjän väkiluku on Yhdysvaltain väkiluvusta.

$$\frac{144,5}{290,3} \approx 0,498 = 49,8 \%$$

Nimittäjänä on Yhdysvaltain väkiluku, johon Venäjän väkilukua verrataan. Koska Venäjän väkiluku on pienempi, tulos on alle 100 %.

Yhdysvaltain väkilukua vastaa 100 %.

Koska $100 \% - 49,8 \% = 50,2 \%$, niin Venäjän väkiluku on 50,2 % Yhdysvaltain väkilukua pienempi.

b) Lasketaan, kuinka monta prosenttia Yhdysvaltain väkiluku on Venäjän väkiluvusta.

$$\frac{290,3}{144,5} \approx 2,009 = 200,9 \%$$

Nimittäjänä on Venäjän väkiluku, johon Yhdysvaltain väkilukua verrataan. Koska Yhdysvaltain väkiluku on suurempi, tulos on yli 100 %.

Venäjän väkilukua vastaa nyt 100 %.

Koska $200,9 \% - 100 \% = 100,9 \%$, niin Yhdysvaltain väkiluku on 100,9 % Venäjän väkilukua suurempi.

Vastaus

a) 49,8 % b) 100,9 %*

* Tehtävä voitaisiin ratkaista myös toisin: Ensin lasketaan väkilukujen erotus $290,3 - 144,5 = 145,8$ (miljoonaa). Sen jälkeen a-kohdassa lasketaan, kuinka monta prosenttia erotus on Yhdysvaltain väkiluvusta, ja b-kohdassa, kuinka monta prosenttia erotus on Venäjän väkiluvusta. Vertaa tapoihin 1 ja 2 edellisessä esimerkissä 4.

Prosenttilukujen vertaaminen

ESIMERKKI 7

Vuonna 2002 yli 65-vuotiaiden osuus Suomen väestöstä oli 15,3 %. Vuonna 2020 osuuden ennustetaan olevan 22,7 %. Kuinka ennustuksen mukaan yli 65-vuotiaiden osuus Suomen väestöstä muuttuu vuodesta 2002 vuoteen 2020?

Ratkaisu

Yli 65-vuotiaiden suhteellinen osuus Suomen väestöstä kasvaa 15,3 %:sta 22,7 %:iin.
Lasketaan prosenttilukujen erotus.

$$22,7 - 15,3 = 7,4$$

Yli 65-vuotiaiden osuus kasvaa 7,4 prosenttiyksikköä.

Vastaus

7,4 prosenttiyksikköä

Prosenttiyksikkö

Kun verrataan prosentteina ilmaistuja suhteellisia osuuksia, niin prosenttilukujen erotuksen yksikkö on *prosenttiyksikkö*.

TEHTÄVIÄ

116. Huoltamonpitäjä nosti bensiinin litrahinnan 1,121 eurosta 1,293 euroon. Kuinka monta prosenttia hinta nousi?

117. Yrityksen liikevaihto pieneni vuodessa 3,98 miljardiin euroon 4,17 miljardista eurosta. Kuinka monta prosenttia liikevaihto pieneni?

118. Helsingin ilman pölypitoisuudeksi mitattiin $154 \mu\text{g}/\text{m}^3$ (mikrogrammaa kuutiometrisä). Kuinka monella prosentilla Maailman terveysjärjestön WHO:n ohjearvo $90 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ylittyy?

119. Uusi hinta 4,99 euroa oli 2 euroa vanhaa hintaa alhaisempi. Kuinka monta prosenttia hintaa oli alennettu?

120. a) Vuonna 1939 henkeä kohti laskettu alkoholinkulutus Suomessa oli sataprosenttiseksi alkoholiksi muutettuna 1,4 litraa. Vuonna 2002 kulutus oli 9,3 litraa. Kuinka monta prosenttia kulutus on kasvanut?
b) Ruista kulutettiin henkeä kohti 69,2 kg vuonna 1939. Vuonna 2002 kulutus oli 14,8 kg. Kuinka monta prosenttia kulutus on vähentynyt?

121. Ilta-Sanomien keskilevikki vuonna 2002 oli 204 820 ja Iltalehden 126 321. Laske prosentin kymmenesosan tarkkuudella,
a) kuinka monta prosenttia Ilta-Sanomien levikki oli Iltalehden levikkiä suurempi
b) kuinka monta prosenttia Iltalehden levikki oli Ilta-Sanomien levikkiä pienempi.

122. Antilla oli 4 euroa ja Eevalla 8 euroa.

Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

- a) Eevalla on 50 % enemmän rahaa kuin Antilla.
- b) Eevalla on 100 % enemmän rahaa kuin Antilla.
- c) Antilla on 50 % vähemmän rahaa kuin Eevalla.
- d) Antilla on 100 % vähemmän rahaa kuin Eevalla.

123. Sinileimaista emmental-juustoa myytiin kaupassa 2,19 euron hintaisissa 350 gramman pakkauksissa ja 5,49 euron hintaisissa yhden kilogramman pakkauksissa. Kummassa pakkauksessa juuston kilogrammahinta oli alhaisempi? Kuinka monta prosenttia alhaisempi?

124. Juuston suolapitoisuus alennettiin 5,5 %:sta 4,0 %:iin.

- a) Kuinka juuston suolapitoisuus muuttui?
- b) Kuinka monta prosenttia väheni 350 gramman juustopalassa olevan suolan määrä?

125. K-ryhmän markkinaosuus päivittäistavaroitten myynnistä oli 37,5 % vuonna 2000 ja seuraavana vuonna 1,0 prosenttiyksikköä pienempi. Mikä K-ryhmän markkinaosuus oli vuonna 2001? Voidaanko näistä tiedoista päätellä, että K-ryhmän myynti pieneni?

126. Vaaka näytti 56 kg, vaikka Minnan todellinen paino oli 52 kg. Mikä on virheprosentti? *Virheprosentti* ilmaisee, kuinka monta prosenttia virheellinen arvo poikkeaa oikeasta arvosta.

127. Polkupyörän matkamittarin lukema kasvoi 36 kilometrin matkalla 182,2:sta 215,1:een. Kuinka suuri mittarin suhteellinen virhe oli?

MUUTTUNEEN ARVON LASKEMINEN

Korotus

ESIMERKKI 8

Työpaikalla sovittiin 4,5 %:n palkankorotuksesta. Laske uusi palkka, jos nykyinen on a) 1 490 euroa b) 3 934 euroa.

Ratkaisu

Uusi palkka on $100 \% + 4,5 \% = 104,5 \%$ korotusta edeltävästä palkasta. Korotettu palkka saadaan, kun nykyinen palkka kerrotaan luvulla 1,045.

a) $1,045 \cdot 1\,490 \approx 1\,557$ (euroa)

b) $1,045 \cdot 3\,934 \approx 4\,111$ (euroa)

Vastaus

a) 1 557 euroa b) 4 111 euroa

Alennus

ESIMERKKI 9

Verotuksen muutos alensi kirjojen hintoja 3,6 %. Laske uusi hinta, jos entinen oli a) 12,95 euroa b) 99,90 euroa.

Ratkaisu

Alentunut hinta on $100 \% - 3,6 \% = 96,4 \%$ alennusta edeltävästä hinnasta. Kirjojen hinnat tulivat 0,964-kertaisiksi.

a) $0,964 \cdot 12,95 \approx 12,48$ (euroa)

b) $0,964 \cdot 99,90 \approx 96,30$ (euroa)

Vastaus

a) 12,48 euroa b) 96,30 euroa

TEHTÄVIÄ

128. Millä desimaaliluvulla hinta tulee kertoa, jos hintaa

- a) korotetaan 25 %
- b) korotetaan 120 %
- c) alennetaan 25 %
- d) alennetaan 3,5 %?

129. Korota hintoja 15 %.

- a) 340 €
- b) 3,20 jeniä
- c) 90 senttiä

130. Laske hintoja 4 %.

- a) 320 €
- b) 99,50 \$
- c) 4,5 miljardia euroa

131. Tammikuun alussa työpaikalla siirryttiin lyhennettyyn työviikkoon, jolloin palkat aleni-
vat 15 %. Heinäkuussa palkkoja voitiin nostaa
20 %. Kuinka paljon sai tämän jälkeen palkkaa
työntekijä, jonka palkka vuoden alussa oli

- a) 1 750 euroa
- b) 3 266 euroa?

132. Kireässä kilpailussa pyöräliike alentaa
hintojaan 30 %. Liikkeen konkurssimyynnissä
hintoja pudotetaan vielä 60 %.

- a) Kuinka paljon maksaa alun perin 580 euroa
maksanut polkupyörä?
- b) Kuinka monta prosenttia hinta on pudonnut
alkuperäisestä?

133. Laske entinen hinta, jos

- a) uusi hinta 15 %:n hinnankorotuksen jälkeen
on 391 euroa
- b) uusi hinta 35 %:n alennuksen jälkeen on
507 euroa.

134. Kirjan myyntihinta muodostuu perushin-
nasta ja siihen lisätystä 8 %:n arvonlisäverosta.
Kuinka paljon arvonlisäveroa sisältyy 9,90 eu-
roa maksavan oppikirjan hintaan?

135. Vuonna 2003 kaupungissa oli 1 260 lu-
kiolaista. Kouluvirastossa arvioitiin, että lukio-
laisten määrä lisääntyy vuosittain neljällä pro-
sentilla. Mikä ennuste saatiin vuodelle 2006?

PROSENTTILAUSEKKEITA

ESIMERKKI 10

Tehtaan tuotanto on tänä vuonna a yksikköä. Ilmaise lausekkeena ensi vuoden tuotanto, jos tuotanto

a) kasvaa 40 % b) vähenee 12 %.

Ratkaisu

a) Ensi vuoden tuotanto on $100 \% + 40 \% = 140 \%$ tämän vuoden tuotannosta. Tuotanto kasvaa siis 1,4-kertaiseksi. Ensi vuoden tuotanto on $1,4a$.

b) Ensi vuoden tuotanto on $100 \% - 12 \% = 88 \%$ tämän vuoden tuotannosta. Tuotanto pienenee 0,88-kertaiseksi. Ensi vuoden tuotanto on $0,88a$.

Vastaus

a) $1,4a$ b) $0,88a$

ESIMERKKI 11

Kauppias nosti suosikkituotteen hintaa ennen joulumarkkinoita 30 % ja joulun jälkeen alensi hintaa 25 %. Kuinka monta prosenttia tuotteen lopullinen hinta on alkuperäistä korkeampi tai alhaisempi?

Ratkaisu

Hintaa ei tiedetä, joten sitä on merkittävä kirjaimella. Olkoon tuotteen alkuperäinen hinta a .

Alkuperäinen hinta: a

Hintaa a korotetaan 30 %: $1,3a$

Hintaa $1,3a$ alennetaan 25 %: $0,75 \cdot 1,30a = 0,975a$.

Lopullinen hinta $0,975a$ on 97,5 % alkuperäisestä hinnasta a .

Hinta aleni $100 \% - 97,5 \% = 2,5 \%$.

Vastaus

2,5 % alhaisempi

ESIMERKKI 12

Kun tuotteen hintaa nostettiin 12,5 %, menekki laski 15 %. Kuinka muuttui tuotteen myynnistä saatu rahamäärä?

Ratkaisu

Myynnistä saatu rahamäärä on hinnan ja menekin tulo. Kummankaan suuruutta ei tiedetä, joten on käytettävä kirjaimia. Merkitään hinnankorotusta edeltävää hintaa a ja menekkiä b .*

Ratkaisun voi jäsentää taulukon avulla.

	Hinta	Menekki	Rahamäärä
Ennen korotusta	a	b	ab
Korotuksen jälkeen	$1,125a$	$0,85b$	$1,125a \cdot 0,85b$

Myynnistä korotuksen jälkeen saatava rahamäärä on

$$1,125a \cdot 0,85b = 0,95625ab.$$

Uusi rahamäärä on 95,625 % vanhasta rahamäärästä.

Rahamäärä väheni

$$100 \% - 95,625 \% = 4,375 \% \approx 4,4 \%.$$

Vastaus

Väheni 4,4 %.

* Usein tällaisissa tehtävissä ratkaisu kannattaa ensin suorittaa yksinkertaisilla luku-arvoilla. Oletetaan, että ennen hinnankorotusta hinta oli 1 euro ja menekki 100 kpl. Myynnistä saatu rahamäärä oli silloin 100 euroa. Hinnankorotuksen jälkeen hinta on 1,125 euroa, menekki 85 kpl ja saatu rahamäärä $1,125 \cdot 85 = 95,625$ euroa. Rahamäärä on siis pienentynyt $4,375 \% \approx 4,4 \%$. Nyt on helpompi laatia varsinainen ratkaisu ja tuloskin on jo tiedossa.

ESIMERKKI 13

Tavaran hintaa alennettiin 20 %. Kuinka monta prosenttia alennettua hintaa pitäisi korottaa, jotta päästäisiin takaisin alkuperäiseen hintaan?

Ratkaisu

Merkitään alkuperäistä hintaa kirjaimella a . Alennettu hinta on silloin $0,8a$.

Tapa 1. Ratkaistaan, millä luvulla k alennettu hinta $0,8a$ tulee kertoa, jotta päästään takaisin alkuperäiseen hintaan a .

$$k \cdot 0,8a = a \quad | : a \quad \text{Hinta } a \text{ voidaan heti jakaa pois.}$$

$$0,8k = 1 \quad | : 0,8$$

$$k = \frac{1}{0,8} = 1,25$$

Alennettu hinta tulee kertoa luvulla 1,25 eli sitä tulisi korottaa 25 %.

Tapa 2. Jotta alennetusta hinnasta $0,8a$ päästään takaisin hintaan a , alennettua hintaa tulee korottaa määrällä $0,2a$. Korotus prosentteina on

$$\frac{0,2\overset{1}{\cancel{a}}}{0,8\underset{1}{\cancel{a}}} = \frac{0,2}{0,8} = 0,25 = 25 \, \%.$$

Vastaus

25 %

TEHTÄVIÄ

136. Kirjoita lausekkeena uusi hinta, kun vanhaa hintaa a

- a) korotetaan 30 %
- b) korotetaan 1,2 %
- c) korotetaan 140 %
- d) alennetaan 30 %
- e) alennetaan 1,2 %.

137. Kuinka monta prosenttia massa m on kasvanut tai vähentynyt, jos uusi massa on

- a) $1,08m$
- b) $1,4m$
- c) $3,2m$
- d) $0,4m$
- e) $0,944m$?

138. Kuinka monta prosenttia

- a) hinta $0,87b$ on hinnasta $1,12b$
- b) hinta b on hintaa $0,82b$ suurempi
- c) hinta b on hintaa $1,35b$ pienempi?

139. Tuotteen hintaa korotettiin ensin 15 % ja alennettiin sitten 20 %. Kuinka tuotteen hinta kaiken kaikkiaan muuttui?

140. 1990-luvun alkupuolen laman aikana suomalaisten vaatteisiin, tekstiileihin ja jalkineisiin käyttämät rahamäärät supistuivat 13 % vuonna 1992, 6,5 % vuonna 1993 ja 3,5 % vuonna 1994. Kuinka monta prosenttia rahamäärä kolmessa vuodessa supistui?

141. Elintarvikkeen myyntihinta muodostuu perushinnasta ja siihen lisätystä 17 %:n arvonlisäverosta. Kuinka monta prosenttia elintarvikkeen hinnasta on arvonlisävero?

142. Ulkomaankaupassa vietyjen sellutonnien määrä kasvoi edellisestä vuodesta 18,2 %, mutta sellutonnin hinta aleni 17,3 %. Kuinka viennin arvo muuttui?

143. Kun torikauppias alensi mansikoiden kilohintaa 30 %, niin myynti lisääntyi 70 %. Kuinka myynnistä saadut tulot muuttuivat?

144. Kuinka juoman litrahinta muuttuu, kun vanha pullo vaihdetaan uuteen pulloon, jossa

- a) on 20 % enemmän juomaa ja joka maksaa 10 % enemmän
- b) on 20 % vähemmän juomaa ja joka maksaa 10 % vähemmän?

145. Tavarahan hintaa korotettiin ennen joulua. Joulun jälkeen samaa tavaraa myytiin 40 %:n alennuksella, jolloin hinta oli sama kuin ennen korotusta. Kuinka monta prosenttia hintaa oli ennen joulua korotettu?

146. Kun kahvin hinta nousi 12 %, perhe vähensi kahvinkulutustaan niin, että kahviin käytetty rahamäärä pysyi samana kuin ennen korotusta. Kuinka monta prosenttia perhe vähensi kulutusta?

147. Moottorivenematka saareen kestää tyynellä säällä noin 50 minuuttia. Kuinka kauan matka kestää uudella veneellä, jonka nopeus on 30 % suurempi kuin vanhan?

TEHTÄVIÄ PROSENTTILASKENNASTA

148. Syyskaudella seuran ykkösmaalivahti torjui 48 laukausta 56:sta ja kakkosmaalivahti 16 laukausta 18:sta. Keväällä ykkösmaalivahti torjui 12 laukausta 19:stä ja kakkosmaalivahti 51 laukausta 78:sta. Kumman torjuntaprosentti oli parempi syksyllä, kumman keväällä ja kumman koko kaudella?

149. Humalatilan mittana käytetään kehon nesteiden alkoholipitoisuutta promilleina eli tuhan-nesosina. Määrittäminen voidaan tehdä mistä tahansa kehon nesteistä, sillä alkoholi sekoittuu kehon nesteisiin jokseenkin tasaisesti. Yleensä määrittäminen tehdään verestä. Nesteitä on ihmisen painosta noin 70 %. Henkilö, jonka paino on 55 kg, juo puoli pulloa väkevää viiniä, joka sisältää noin 60 g alkoholia. Voiko törkeän rattijuopumuksen raja 1,2 promillea ylittyä?

150. Alennusmyynnissä jo 30 % alennettuja hintoja alennetaan lopuksi vielä 40 %. Mikä on ollut 105 eurolla ostetun takin alkuperäinen hinta?

151. Einari ja Inka myivät poimimansa herkkutatit tukkuostajalle ja saivat 280 euroa. Inka oli kerännyt 30 % enemmän tatteja kuin Einari, joten sovittiin, että myös ansaituista euroista hän saa 30 % enemmän kuin Einari. Kuinka ansio jaettiin?

152. Kirjan vähittäismyyntihinta muodostuu perushinnasta ja siihen lisäystä arvonlisäverosta. Kirjojen arvonlisävero pieneni vuoden 1998 alussa 12 %:sta 8 %:iin. Tällöin eräs kustantaja päätti siirtää veronalennuksen hyödyn kokonaan kirjan ostajalle. Mikä tuli 99,00 markkaa maksaneen kirjan uudeksi hinnaksi? Ilmoita uusi hinta kymmenen pennin tarkkuudella.

153. Rautakauppias on maksanut tavarasta tukkuhinnan 70 euroa. Kuinka suureksi hän asettaa myyntihinnan, jotta hän voisi antaa suurasiakkaalle 40 % alennusta ja silti saada voittoa 20 % tukkuhinnasta?

154. Tuulan kuukausipalkka on 2 559 euroa. Palkasta menee veroa 33 %. Kuinka suuri tulisi palkan olla seuraavana vuonna, jotta nettopalkan ostovoima pysyisi ennallaan siitä huolimatta, että hinnat nousevat ennusteen mukaisesti 2,7 % ja veroprosentti suurenee yhdellä prosenttiyksiköllä?

155. Pankista nostetun asuntolainan koroksi oli sovittu euriborkorko lisättynä 2,5 prosenttiyksiköllä. Oli myös sovittu, että kahden ensimmäisen vuoden aikana lainaa ei vielä lyhennetä, vaan maksetaan ainoastaan korot. Ensimmäisen vuoden aikana euriborkorko oli 3,91 prosenttia ja toisena vuotena 0,85 prosenttiyksikköä suurempi. Kuinka monta prosenttia toiselta vuodelta maksettu korko oli ensimmäisen vuoden korkoa suurempi?

156. S-ryhmän markkinaosuus päivittäistavaroiden myynnistä vuonna 2000 oli 29,0 % ja seuraavana vuonna 1,5 prosenttiyksikköä suurempi. Koko päivittäistavaroiden myynnin arvo kasvoi samana aikana 6,6 %. Kuinka S-ryhmän myynnin arvo muuttui vuodesta 2000 vuoteen 2001?

157. Työvoimaa vähennetään 25 % ja samalla palkkoja alennetaan 10 %. Miten työvoimakulut muuttuvat?

158. Yrityksen liikevoitto oli 17,3 % suurempi ja työntekijöiden määrä 3,1 % pienempi kuin edellisenä vuonna. Kuinka liikevoitto työntekijää kohden oli muuttunut?

159. Suklaan hinta laski 10 %. Kuinka monta prosenttia enemmän suklaata kykeni nyt ostamaan samalla rahamäärällä kuin ennen alennusta?

160. Lähdeveden myyjä alensi veden hintaa 30 %. Kuinka monta prosenttia myynnin määrän tulisi lisääntyä, jotta myynnin arvo säilyisi ennallaan?

161.

Suomen kasvihuonekaasupäästöt lähteittäin 2002

Energian tuotanto	36,0 %
Teollisuus	20,0 %
Liikenne	16,3 %
Kotitaloudet, palvelut ym.	9,7 %
Muu (esim. maatalous ja jätteet)	18,0 %

(Lähde: Tilastokeskus)

Oletetaan, että energiatuotannon päästöjen määrää onnistutaan pienentämään 20 % ja teollisuuden päästöjä 15 % ja että muista lähteistä tulevien päästöjen määrä pysyy ennallaan.

- Kuinka monta prosenttia kokonaispäästöjen määrä pienenee?
- Laadi muuttuneen tilanteen mukainen päästöjen jakauma.

162. Kuinka paljon 8-prosenttista suolaliuosta tulee lisätä kolmeen kilogrammaan 2-prosenttista suolaliuosta, jotta saataisiin liuosta, jonka suolapitoisuus on 6 %?

163. Omenissa on vettä 70 % ja sokeria 4 %. Omenia kuivataan, kunnes veden osuus on enää 10 %. Mikä on kuivattujen omenien sokeripitoisuus?

164. Turpeessa on vettä aluksi 90 %. Kuinka monta prosenttia vedestä on haihdutettava, jotta turpeessa olisi haihduttamisen jälkeen 45 % vettä?

Potenssi

JOHDANTOESIMERKKI 1

Laurin synnyttyä isoäiti talletti hänelle 1 500 euroa pankkitilille, jolle kertyy korkoa 4,5 % vuodessa. Lauri saa tyhjentää tilin täyttäessään 18 vuotta. Kuinka suureksi alkupääoma on tällöin kasvanut, jos korkoprosentti on koko ajan sama?

Ratkaisu

Aina, kun talletukseen lisätään 4,5 % korkoa, talletuksen arvo kasvaa 104,5 %:iin edeltävästä arvosta. Talletus tulee siis joka vuosi 1,045-kertaiseksi.

Yhden vuoden kuluttua pääoma on 1,045-kertainen:

$$1,045 \cdot 1\,500 \text{ (euroa)}$$

Kahden vuoden kuluttua edellinen on tullut 1,045-kertaiseksi.

$$1,045 \cdot 1,045 \cdot 1\,500 = 1,045^2 \cdot 1\,500 \text{ (euroa)}$$

Kolmen vuoden kuluttua pääoma on

$$1,045 \cdot 1,045 \cdot 1,045 \cdot 1\,500 = 1,045^3 \cdot 1\,500 \text{ (euroa)}.$$

18 vuoden kuluttua pääoma on

$$1,045 \cdot 1,045 \cdot \dots \cdot 1,045 \cdot 1\,500 = 1,045^{18} \cdot 1\,500 \approx 3\,312,72 \text{ (euroa)}^*.$$

18 kappaletta

Vastaus

3 312,72 euroa

* Potenssin arvo lasketaan laskimella. Laskimen potenssinäppäin on laskimesta riip-puen esimerkiksi x^y tai $\wedge$.

Potenssin määritelmä

Olkoon n positiivinen kokonaisluku.

Luvun a n :s *potenssi* a^n on tulo:
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kappaletta}}$$

Erityisesti on $a^1 = a$.

Potenssilausekkeessa a^n luku a on *kantaluku* ja luku n on *eksponentti*.

JOHDANTOESIMERKKI 2

Laske laskimella luvun 2^{56} likiarvo. Kuinka monta numeroa luvussa 2^{56} on?

Ratkaisu

Kun potenssin 2^{56} arvo lasketaan laskimella, näyttöön ilmestyy laskimesta riippuen jotakin seuraavankaltaista:

7.205759 16

Luku 2^{56} on liian pitkä mahtuakseen kokonaan laskimen näyttöön. Laskin näyttää luvun likiarvon kymmenpotenssimuodossa. Tulos tulkitaan:

$$2^{56} \approx 7,205759 \cdot 10^{16}$$

Luvun 10 potenssit saadaan kirjoittamalla ykkösen perään eksponentin osoittama määrä nollia.

$$\begin{aligned} 2^{56} &\approx 7,205759 \cdot 10^{16} \\ &= 7,205759 \cdot 10\,000\,000\,000\,000\,000 \\ &= 72\,057\,590\,000\,000\,000. \end{aligned}$$

Tämä on luvun 2^{56} likiarvo kymmenien miljardien* tarkkuudella.

* Tavallisimmat suuria lukuja tarkoittavat lukusanat ovat miljoona (10^6), miljardi (10^9), biljoona (10^{12}) ja triljoona (10^{18}). Luku 2^{56} on siis noin 72 057 biljoonaa 590 miljardia.

Koska kertoimessa 7,205759 on seitsemän numeroa, sanotaan myös, että luku on ilmoitettu *seitsemän numeron tarkkuudella*.

Koska luvussa 10^n on $n + 1$ numeroa (ykkönen ja n nollaa), likiarvosta $7,205759 \cdot 10^{16}$ nähdään, että kokonaisluvussa 2^{56} on 17 numeroa.

Vastaus

$2^{56} \approx 7,205759 \cdot 10^{16}$. Luvussa on 17 numeroa.

Kymmenpotenssimuoto

Suuria lukuja merkitään usein *kymmenpotenssimuodossa* $a \cdot 10^n$, missä kerroin a on vähintään yksi ja pienempi kuin kymmenen: $1 \leq a < 10$.

Kymmenpotenssimuotoa voidaan käyttää myös silloin, kun halutaan selvästi ilmaista mittaluvun tarkkuus.

ESIMERKKI 3

Kirjoita valon nopeus 299 792 456 m/s kymmenpotenssimuodossa kolmen numeron tarkkuudella.

Ratkaisu

Lukujen muuntaminen potenssimuodosta tavalliseen muotoon ja päinvastoin käy esimerkiksi pilkkua siirtämällä.

$$299\,792\,456$$

Pilkkua siirretään 8 askelta ensimmäisen numeron perään.

$$= 2,99792456 \cdot 100\,000\,000$$

Kerroin pyöristetään kolmanteen numeroon.

$$\approx 3,00 \cdot 10^8$$

Vastaus

$$3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

ESIMERKKI 4

Maapallon päiväntasaajan pituudeksi ilmoitetaan usein 40 000 km. Mittaluku pitää kuitenkin paikkansa vain tuhansien kilometrien tarkkuudella. Ilmaise tarkkuus mittaluvun kymmenpotenssimuodolla.

Ratkaisu

Mittaluvun 40 000 km kaksi ensimmäistä numeroa ovat oikeita. Siis päiväntasaajan pituus on $4,0 \cdot 10\,000\text{ km} = 4,0 \cdot 10^4\text{ km}$.

Vastaus

$4,0 \cdot 10^4\text{ km}$

ESIMERKKI 5

Maapallon pinta-ala on $5,101 \cdot 10^{14}\text{ m}^2$. Kuinka paljon pinta-alaa maapallolla on jokaista Maan 6,4 miljardia asukasta kohden. (Väkiluku vuodelta 2004.)

Ratkaisu

Ilmaistaan asukkaiden määrä kymmenpotenssimuodossa.

$$6,4\text{ miljardia} = 6,4 \cdot 10^9$$

Pinta-ala jaetaan asukkaiden määrällä.*

$$\frac{5,101 \cdot 10^{14}}{6,4 \cdot 10^9} \approx 79\,703$$

Tulos pyöristetään samaan kahden numeron tarkkuuteen kuin epätarkempi luku 6,4 miljardia.

$$\approx 80\,000\text{ (m}^2\text{/as)}$$

Vastaus

80 000 neliometriä

* Kymmenpotenssimuodossa oleva luku syötetään laskimeen käyttäen näppäintä **(EXP)** (tai **(EE)** tai vastaava.) Esimerkiksi jakajana oleva luku $6,4 \cdot 10^9$ syötetään: 6.4 **(EXP)** 9

Jos jakaja näppäillään tulona, niin oikean laskujärjestyksen säilymiseksi jakajan on oltava sulkeissa: **(** 6.4 **)** **(×)** 10 **(x^y)** 9 **)**.

Kerto- ja jakolaskun tarkkuussääntö

Kun mittalukuja kerrotaan tai jaetaan keskenään, tulos ilmoitetaan yhtä monen numeron tarkkuudella, kuin millä epätarkin lähtöarvo on ilmoitettu.

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

165. Lauran synnyttyä isoisä talletti hänelle 300 euroa pankkitilille, jolle kertyy korkoa 4,35 % vuodessa. Laura saa tyhjentää tilin täytessään 50 vuotta. Kuinka suureksi alkupääoma on tällöin kasvanut, jos korkoprosentti on koko ajan sama?

166. Lehtevää voitaikinaa leivottaessa taikina kaulitaan ohueksi, taitetaan kolminkertaiseksi, kaulitaan ohueksi, taitetaan jälleen kolminkertaiseksi jne. Näin taikinaan muodostuu ohuita kerroksia. Visa kauli ja taittoi 15 kertaa. Kuinka monta kerrosta muodostui?

167. Suomessa oli vuonna 1600 noin 300 000 asukasta. Mikä olisi Suomen väkiluku ollut vuonna 2000, jos vuotuinen väestönkasvu olisi ollut

- a) 0,4 % (Suomen nykyinen väestönkasvu)
- b) 1,7 % (maapallon nykyinen väestönkasvu)?

168. Alueen hirvikanta on kasvanut vuosittain noin 18 % ja on nyt 4 200 yksilöä. Kuinka suuri hirvikanta oli viisi vuotta sitten?

169. Merkintä a^{b^c} tarkoittaa potenssia, jonka kantaluku on a ja eksponentti b^c .

Laske a) 2^{2^3} b) 2^{3^2} .

170. Määritä luvun 7^{42} likiarvo neljän numeron tarkkuudella. Kuinka monta numeroa kokonaisluvussa 7^{42} on?

171. a) Pluton keskietäisyys auringosta on 5 885 000 000 kilometriä. Kirjoita etäisyys kymmenpotenssimuodossa pyöristettynä kahden numeron tarkkuuteen.

b) Maan keskietäisyys Auringosta on kolmen numeron tarkkuudella 150 000 000 kilometriä. Kirjoita etäisyys metreinä kymmenpotenssimuodossa.

c) Merkuriuksen keskietäisyys Auringosta on $5,8 \cdot 10^{10}$ m. Kirjoita etäisyys kilometreinä ilman kymmenen potenssia.

172. Himalajan vuoristossa sijaitseva Mount Everest on maailman korkein vuori. Intian hallituksen maanmittaustoimisto mittautti vuoren korkeuden vuonna 1852. Kuudesta eri paikasta tehtyjen mittauksen keskiarvoksi tuli jalan tarkkuudella 29 000 jalkaa. Koska maanmittarit pelkäsivät tuloksen näyttävän kovin epätarkalta, he päättivät lisätä korkeuteen kaksi jalkaa, ja niin Mount Everestin korkeus oli pitkän aikaa 29 002 jalkaa. Ilmaise kymmenpotenssimuodolla, että mittauksen tulos 29 000 jalkaa on tarkka jalan tarkkuudella.

173. Maailman todennettujen maakaasuvarojen suuruuden arvioitiin vuonna 2001 olevan $1,5 \cdot 10^{14}$ m³. Saman vuoden tuotanto oli $2,42 \cdot 10^{12}$ m³. Kuinka moneksi vuodeksi maakaasua näiden lukujen perusteella riittää?

174. Vanhan tarinan mukaan sakkipeli keksittiin noin 2 500 vuotta sitten Intiassa. Kun pelin keksijä oli esitellyt pelinsä kuninkaalleen, tämä ihastui peliin niin, että lupasi keksijälle palkinnoksi mitä tahansa. Keksijä ilmoitti tyytyvänsä vaatimattomaan palkkioon: hän pyysi ensimmäiselle ruudulle yhden vehnänjyvän, toiselle kaksi, kolmannelle neljä ja niin edelleen, aina seuraavalle ruudulle kaksi kertaa niin monta jyvää kuin edelliselle.

- a) Kuinka monta jyvää olisi sakkilaudan viimeisellä (64.) ruudulla?
- b) Mikä on sakkilaudan viimeisellä ruudulla olevan vehnämäärän massa? Anna vastaus tonneina. Yhden vehnänjyvän massa on noin 0,03 g.
- c) Koko maailman vehnäntuotanto on noin $5,4 \cdot 10^8$ tonnia vuodessa. Kuinka monen vuoden tuotanto on sakkilaudan viimeisellä ruudulla?

SARJA II.

PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

175. Ensimmäisinä kuukausina vastasyntyneen pituus suurenee joka kuukausi 4 %. Kuinka pitkäksi kasvaisi 54 cm:n pituisena syntynyt vauva kolmessa vuodessa, jos kasvu jatkuisi samanlaisena?

176. Kumipallo pomppaa korkeudelle, joka on 70 % pudotuskorkeudesta. Pallo pudotetaan 2,0 metrin korkeudelta. Kuinka korkealle pallo kohoaa pompatessaan maasta kymmenennen kerran?

177. Luonnonsuojelualueen peurakannan suuruudeksi laskettiin viime vuonna noin 1 500 yksilöä ja tänä vuonna noin 1 800. Oletetaan, että kannan vuotuinen kasvuprosentti on sama myös tulevaisuudessa. Mikä on peurojen lukumäärä 10 vuoden kuluttua?

178. Yrityksen liikevaihto on kasvanut kahdeksan vuoden ajan 20 % vuodessa ja on nyt 13,6 miljoonaa euroa. Kuinka suuri liikevaihto oli kahdeksan vuotta sitten?

179. Alkuluvut ovat ykköstä suurempia positiivisia kokonaislukuja, jotka ovat jaollisia vain itsellään ja luvulla yksi. Esimerkiksi luvut 2, 3, 5, 7 ja 11 ovat alkulukuja. Vuodesta 1876 vuoteen 1951 suurin tunnettu alkuluku oli $2^{127} - 1$.

Vuonna 1951 kärkeen siirtyi luku $\frac{2^{148} + 1}{17}$,

minkä jälkeen kärkipaikka alkoi tietokoneiden ansiosta vaihtua tiheään tahtiin. Kuinka monta numeroa näissä luvuissa on?

180. Vuonna 1975 syntynyt Sari ryhtyi tutkimaan esivanhempiaan. Kuinka monta esivanhempaa Sarilla on, kun mennään taaksepäin

- a) kaksi sukupolvea
 b) kymmenen sukupolvea?
 c) Oletetaan, että sukupolvet seuraavat toisiaan 25 vuoden välein. Kuinka monta esivanhempaa Sarilla oli 1000-luvun alussa? Ilmaise lukumäärä myös sanallisesti.

181. Auringon massa on $1,989 \cdot 10^{30}$ kg ja tilavuus $1,412 \cdot 10^{27}$ m³. Maan massa on $5,974 \cdot 10^{24}$ kg ja tilavuus $1,083 \cdot 10^{21}$ m³. Laske kummankin taivaankappaleen keskitiheys (yhden kuutiometrin massa).

182. Andromedan tähtisumu on kaukaisin tähtitaivaan objekti, jonka voi nähdä paljain silmin. Tähtisumun etäisyys Maasta on noin $2,2 \cdot 10^6$ valovuotta.

- a) Ilmoita Andromedan etäisyys Maasta kilometreinä. Valovuosi on valon yhdessä vuodessa kulkema matka, ja valon nopeus on $3,00 \cdot 10^8$ m/s.
 b) Kuvitellaan, että Andromedan tähtisumussa joku tällä hetkellä tarkkailee valtavalla kaukoputkella Maata. Mitä hän näkee?

183. Laske.

- a) $9 \cdot 3,2 \cdot 10^{17}$
- b) $17 \cdot 9,4 \cdot 10^{125}$
- c) $88 \cdot 5,4 \cdot 10^{1201}$

184. Laske.

- a) $4 \cdot 10^{15} + 5 \cdot 10^{14}$
- b) $5,7 \cdot 10^{102} + 3,4 \cdot 10^{101}$
- c) $5(1,3 \cdot 10^{1004} + 9,4 \cdot 10^{1003})$

185. Luonnontieteissä ja tekniikassa käytetään yleisimmin kymmenpotenssimuotoa $a \cdot 10^n$, jossa eksponentti n on luvun 3 monikerta ja kerroin a on välillä $1 \leq a < 1\,000$. Luvun suuruusluokka voidaan myös ilmaista yksikön etuliitteellä.

kymmenen potenssi	etuliite	lyhenne
10^3	kilo-	k
10^6	mega-	M
10^9	giga-	G
10^{12}	tera-	T
10^{15}	peta-	P
10^{18}	eksa-	E

- a) Loviisan ydinvoimalan teho on 880 MW. Kuinka monen 40 watin hehkulampun samanlaiseen polttamiseen teho riittää?
- b) Maailmassa kulutettiin vuonna 2001 vesivoimalla tuotettua energiaa 227 miljoonaa öljykvivalenttitonnia. Kirjoita energian määrä wattitunteina (Wh) sopivaa etuliitteellistä merkintää käyttäen, kun 1000 kWh on 0,086 öljykvivalenttitonnia. (Energian yksikkö öljykvivalenttitonni ilmaisee, kuinka monta tonnia öljyä tarvitaan saman energiamäärän tuottamiseen.)

186. Vuonna 1935 alkoi Denverissä Yhdysvalloissa ketjukirjevillitys, joka myöhemmin levisi myös muihin maihin.

Hyvä vastaanottaja

Lähetä luettelon ensimmäiselle kymmenen senttiä. Jätä hänet pois luettelosta ja kirjoita oma nimesi ja osoitteesi viimeiseksi. Lähetä kirje edelleen viidelle tuttavallasi. Jos näin teet, ansaitset 1 562,40 dollaria

J. Smith	Box 123, Las Vegas
D. Duck	Home Str., Duckville
R. Kirby	159 W 73 Str., NYC
I. Jones	Univ. of Cal., San Diego
U. Sam	White House, Washington DC
Dr. Hackenbush	500 Riverside Dr., NYC

Onko lupauksessa perää? Kuinka suuri ansio olisi, jos luettelossa olisi seitsemän nimeä? (Ketjukirjeet, joissa vaaditaan lähettämään rahaa, on nyttemmin kielletty lailla.)

187. Mikä on suurin luku, joka voidaan kirjoittaa käyttämällä laskutoimitus- ja potenssimerkintöjä sekä

- a) neljää ykköstä
- b) neljää kakkosta?

Lukujärjestelmät

Tapa, jolla ilmoitamme luvut, perustuu luvun 10 potensseihin. Esimerkiksi

$$7806 = 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 6.$$

Ensimmäisenä on suurimman mahdollisen kymmenen potenssin monikerta, toisena edellisen kymmenen potenssin jne. kunnes tullaan ykkösiin. Lukujen merkitsemiseen tarvitaan kymmen numeromerkkiä: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9. Numeromerkkin paikka ilmaisee, mistä luvun 10 potenssista on kyse: oikealta lähtien ykköset, kymmenet, luvun 10 toiset potenssit, kolmannet potenssit jne. Luku luetaan vasemmalta oikealle käyttäen luvun 10 potensseille vakiintuneita nimityksiä: tuhat, sata jne. Käytämme siis lukujärjestelmää, jonka *kantaluku* on luku 10, eli ns. *kymmenjärjestelmää*.

Lukujärjestelmän kantalukuna voidaan käyttää mitä tahansa ykköstä suurempaa luonnollista lukua. Esimerkiksi luku, joka kymmenjärjestelmässä merkitään 53, on luvun 2 potenssien avulla ilmaistuna

$$32 + 16 + 4 + 1 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 1,$$

joten *kaksijärjestelmässä* eli *binäärijärjestelmässä* luku merkitään 110101. Numeromerkkejä tarvitaan vain kaksi: 0 ja 1. Kakkosen potensseilla ei ole vakiintuneita nimityksiä, joten luku luetaan luettelemalla numeromerkit vasemmalta oikealle.

Sama kymmenjärjestelmän luku 53 on luvun 5 potenssien avulla ilmaistuna

$$2 \cdot 25 + 3 = 2 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 3 \cdot 1,$$

joten *viisijärjestelmässä* luku merkitään 203. Viisijärjestelmässä numeromerkkejä tarvitaan viisi: 0, 1, 2, 3 ja 4.

Luvun 8 potenssien avulla ilmaistuna kymmenjärjestelmän luku 53 on $6 \cdot 8^1 + 5 \cdot 1$. Kahdeksanjärjestelmässä luku siis merkitään 65.

188. Kirjoita kymmen-, kaksi-, viisi- ja kahdeksanjärjestelmässä

- a) vuorokauden tuntien lukumäärä
- b) vuorokausien lukumäärä vuodessa.

189. Kirjoita kymmenjärjestelmässä luku, jota merkitään

- a) kaksijärjestelmässä 10010
- b) viisijärjestelmässä 34120.

190. 16-järjestelmässä tarvitaan 16 numeromerkkiä: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E ja F.

- a) Kirjoita tehtävän 188 lukumäärät 16-järjestelmässä.
- b) Miltä olisi näyttänyt millennium-vuosiluku 2000, jos ajanlaskussa 10-järjestelmän sijasta käytettäisiinkin 16-järjestelmää?
- c) Kirjoita 16-järjestelmän luku A2D2 kymmenjärjestelmässä.

191. Laadi

a) viisijärjestelmän kertotaulu

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

b) kaksijärjestelmän kertotaulu.

192. Tietokoneet suorittavat kaikki laskutoimitukset kaksijärjestelmässä. Laske kaksijärjestelmässä.

a) $1 + 1$

b) $1 + 1 + 1$

c) $100101 + 1101001$

(kannattaa laskea allekkain)

d) $1011 \cdot 11010$

193. Ihmiskunnan historian mittaan eri kulttuureissa on käytetty myös muita lukujärjestelmiä kuin kymmenjärjestelmää. Ranskan lukusanoissa on jäänteitä 20-järjestelmästä.

Ranskan lukusanat yhdestä 20:een

1 un	11 onze
2 deux	12 douze
3 trois	13 treize
4 quatre	14 quatorze
5 cinq	15 quinze
6 six	16 seize
7 sept	17 dix-sept
8 huit	18 dix-huit
9 neuf	19 dix-neuf
10 dix	20 vingt

Kirjoita kymmenjärjestelmän luku 87

a) 20-järjestelmässä

b) ranskan lukusanalla.

c) Kirjoita kymmenjärjestelmän luku 92 ranskan lukusanalla.

194. Omassa kulttuurissamme on sekä lukusanoja että mittayksiköitä, jotka ilmentävät muuta kuin kymmenjärjestelmää. Etsi esimerkkejä. Mitä etuja on kymmenjärjestelmällä? Olisiko jokin muu järjestelmä jossain suhteessa parempi?

Potenssilausekkeet

ESIMERKKI 1

Merkitse lauseke ja laske sen arvo.

- a) Luvun -3 neljäs potenssi.
- b) Luvun 3 neljännen potenssin vastaluku.

Ratkaisu

a) Negatiivinen (miinusmerkkinen) kantaluku on aina merkittävä sulkeisiin. Luvun -3 neljäs potenssi merkitään $(-3)^4$.

$$\begin{aligned} (-3)^4 &= -3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \\ &= 81 \end{aligned}$$

Koska eksponentti on parillinen, potenssin arvo on positiivinen.

b) Luvun 3 neljäs potenssi on $3^4 = 81$. Luvun 3 neljännen potenssin vastaluku on

$$-3^4 = -81.$$

Vastaus

$$\text{a) } (-3)^4 = 81 \quad \text{b) } -3^4 = -81$$

Ongelma 1

Pura potenssit tuloiksi ja sievennä lauseke.

$$\text{a) } (5x)^2 \quad \text{b) } \left(\frac{4}{7}\right)^2 \quad \text{c) } a \cdot a^3 \quad \text{d) } \frac{b^3}{b} \quad \text{e) } (b^2)^3$$

Potenssilausekkeita voidaan sieventää niin, että potenssit puretaan ensin tuloiksi potenssin määritelmän mukaisesti ja sitten käytetään lukujen kertolaskun ominaisuuksia.

ESIMERKKI 2

Sievennä lauseke.

a) $(7a)^3$ b) $\left(\frac{b}{4}\right)^2$ c) $b^2 \cdot b^3$ d) $\frac{x}{x^4}$ e) $(x^4)^2$

Ratkaisu

a) $(7a)^3 = 7a \cdot 7a \cdot 7a = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot aaa = 7^3 a^3 = 343a^3$

b) $\left(\frac{b}{4}\right)^2 = \frac{b}{4} \cdot \frac{b}{4} = \frac{bb}{4 \cdot 4} = \frac{b^2}{16}$

c) $b^2 \cdot b^3 = bb \cdot bbb = bbbbb = b^5$

d) $\frac{x}{x^4} = \frac{\overset{1}{\cancel{x}}}{\underset{1}{\cancel{x}}xxx} \quad \text{Supistetaan.}$

$$= \frac{1}{xxx} = \frac{1}{x^3}$$

e) $(x^4)^2 = x^4 \cdot x^4 = xxxx \cdot xxxx = x^8$

Vastaus

a) $343a^3$ b) $\frac{b^2}{16}$ c) b^5 d) $\frac{1}{x^3}$ e) x^8

Ongelma 2

Laske päässä laskuna a) potenssien tulo $2^6 \cdot 5^6$ b) potenssien osamäärä $\frac{14^3}{7^3}$.

Potenssilausekkeitä voidaan sieventää myös käyttämällä niin sanottuja potenssikaavoja. Potenssikaavat voidaan perustella samalla tavalla, jolla edellä ratkaistiin esimerkki 2: Potenssit puretaan tuloiksi potenssin määritelmän mukaisesti ja käytetään kertolaskun ominaisuuksia.

Tulon ja osamäärän potenssien kaavat

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Tulon potenssi on tekijöiden potenssien tulo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Osamäärän potenssi on jaettavan ja jakajan potenssien osamäärä.

Kaavat voidaan kirjoittaa ja tulkita myös toisin päin.

$$a^n b^n = (ab)^n$$

Jos potensseilla on sama eksponentti, niin potenssien tulo on kantalukujen tulon potenssi.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Jos potensseilla on sama eksponentti, niin potenssien osamäärä on kantalukujen osamäärän potenssi.

ESIMERKKI 3

Sievennä. a) $(-2a)^7$ b) $\left(\frac{3x}{5}\right)^4$

Ratkaisu

$$\begin{aligned} \text{a) } (-2a)^7 &= (-2)^7 a^7 \\ &= -128a^7 \end{aligned}$$

Tulon potenssin kaava $(ab)^n = a^n b^n$.

Koska eksponentti on pariton, potenssin $(-2)^7$ arvo on negatiivinen.

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(\frac{3x}{5}\right)^4 &= \frac{(3x)^4}{5^4} \\ &= \frac{3^4 x^4}{5^4} = \frac{81x^4}{625} \end{aligned}$$

Osamäärän potenssin kaava $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Vastaus

a) $-128a^7$ b) $\frac{81x^4}{625}$

ESIMERKKI 4

Kuution särmien pituus kasvaa 40 %. Kuinka monta prosenttia kuution tilavuus kasvaa?

Ratkaisu

Merkitään kuution särmää kirjaimella a . Kuution tilavuus on a^3 . Kun särmä kasvaa 40 %, särmän pituudeksi tulee $1,4a$. Tilavuus on tällöin

$$\begin{aligned}(1,4a)^3 &= 1,4^3 a^3 && \text{Tulon potenssin kaava } (ab)^n = a^n b^n. \\ &= 2,744a^3.\end{aligned}$$

Tilavuus tulee 2,744-kertaiseksi eli se kasvaa $174,4 \% \approx 170 \%$.

Vastaus

170 %

ESIMERKKI 5

Laske päässä laskuna $\frac{36^4}{12^4}$.

Ratkaisu

$$\begin{aligned}\frac{36^4}{12^4} &= \left(\frac{36}{12}\right)^4 && \text{Käytetään osamäärän potenssin kaavaa toiseen suuntaan:} \\ &= 3^4 = 81 && \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.\end{aligned}$$

Ongelma 3

Taulukossa on potenssien 3^n arvoja. Laske taulukon avulla

a) $81 \cdot 243$ b) $\frac{59\,049}{729}$ c) 243^2 .

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3^n	3	9	27	81	243	729	2 187	6 561	19 683	59 049

Muita potenssikaavoja ovat samankantaisten potenssien tulon ja osamäärän kaavat sekä potenssin potenssin kaava.

Samankantaisten potenssien tulon ja osamäärän kaavat

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Saman kantaluvun potenssien tulo on yhtä suuri kuin saman kantaluvun potenssi, jonka eksponentti on eksponenttien summa.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Saman kantaluvun potenssien osamäärä on yhtä suuri kuin saman kantaluvun potenssi, jonka eksponentti on eksponenttien erotus. Kaava pätee, kun $a \neq 0$ ja kun $m > n$.*

*

Potenssin potenssin kaava

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Kun kantaluvun potenssi korotetaan potenssiin, niin eksponentiksi tulee eksponenttien tulo.

ESIMERKKI 6

Sievennä.

a) $b^3 \cdot b^{12}$ b) $\frac{8x^{10}}{6x^3}$ c) $x(2x^5)^3$

Ratkaisu

$$\begin{aligned} \text{a) } b^3 \cdot b^{12} &= b^{3+12} \\ &= b^{15} \end{aligned}$$

Samankantaisten potenssien tulon kaava
 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

* Seuraavassa luvussa määritellään potenssit, joiden eksponentti on nolla tai negatiivinen kokonaisluku. Tällöin voidaan vapautua oletuksesta $m > n$.

$$b) \frac{8x^{10}}{6x^3} = \frac{8x^{10-3}}{6}$$

Samankantaisten potenssien osamäärän kaava

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

$$= \frac{\overset{4}{\cancel{8}}x^7}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{4x^7}{3}$$

$$c) x(2x^5)^3 = x \cdot 2^3 (x^5)^3$$

Tulon potenssin kaava.

$$= x \cdot 8x^{5 \cdot 3} = x \cdot 8x^{15}$$

Potenssin potenssin kaava.

$$= 8x^{16}$$

Voidaan järkeillä suoraan tai voidaan käyttää samankantaisten potenssien tulon kaavaa, sillä $x = x^1$.

Vastaus

$$a) b^{15} \quad b) \frac{4x^7}{3} \quad c) 8x^{16}$$

ESIMERKKI 7

Laske luvun $(9,7 \cdot 10^{103})^{15}$ likiarvo kahden numeron tarkkuudella.

Ratkaisu

Potenssin arvo on liian suuri laskettavaksi suoraan laskimella. Käytetään potenssikaavoja.

$$(9,7 \cdot 10^{103})^{15} = 9,7^{15} \cdot (10^{103})^{15}$$

Tulon potenssin kaava.

$$= 9,7^{15} \cdot 10^{103 \cdot 15} = 9,7^{15} \cdot 10^{1545}$$

Potenssin potenssin kaava.

$$\approx 6,3 \cdot 10^{14} \cdot 10^{1545}$$

$$= 6,3 \cdot 10^{14+1545}$$

Samankantaisten potenssien tulon kaava.

$$= 6,3 \cdot 10^{1559}$$

Vastaus

$$6,3 \cdot 10^{1559}$$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

195. Luvun a toista potenssia a^2 sanotaan luvun a neliöksi ja luvun a kolmatta potenssia a^3 luvun a kuutioksi. Mistä nimitykset ovat tulleet? Merkitse lausekkeena ja laske

- a) luvun 6 neliö
- b) luvun 6 neliön vastaluku
- c) luvun -6 neliö
- d) luvun -6 neliön vastaluku
- e) luvun -6 kuutio
- f) luvun 6 kuution vastaluku
- g) luvun -6 kuution vastaluku.

196. Laske.

- a) $(-2004)^1$
- b) $(-1)^{2004}$
- c) -1^{2004}

197. Laske.

- a) $(5 - 3)^2$
- b) $-5^2 - 3^2$
- c) $(-5)^2 - 3^2$
- d) $(-5 - 3)^2$
- e) $-5 - 3^2$
- f) $-5^2 \cdot (-3)^2$

198. Laske

- a) lausekkeen $x^2 - 4x$ arvo muuttujan x arvolla -1
- b) lausekkeen $-x^2 + 2x$ arvo muuttujan x arvolla 5 .

199. Sievennä lauseke. Ilmaise tulos potenssi-merkinnän avulla.

- a) $x \cdot xxxxx$
- b) $\frac{aaaaa}{aa}$
- c) $\frac{x}{xxxxx}$
- d) $\frac{1}{xx} \cdot \frac{1}{xxx}$
- e) $aaaaa \cdot \frac{1}{aa}$

200. Pura potenssit tuloiksi ja sievennä lauseke.

- a) $(6a)^2$
- b) $\left(\frac{2}{a}\right)^3$
- c) $3a^2 \cdot 5a^4$
- d) $\frac{x}{x^4}$
- e) $(x^2)^5$

201. Laske.

- a) $\frac{2^3}{5}$
- b) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$
- c) $\left(-1\frac{3}{4}\right)^2$

202. Sievennä.

- a) $(-3x)^5$
- b) $(-x)^{10}$
- c) $\left(\frac{x}{2}\right)^7$
- d) $\left(\frac{-2x}{3}\right)^4$

203. Kuinka luvun neljännän potenssin arvo muuttuu, jos luku

- a) kasvaa kolminkertaiseksi
- b) pienenee puoleen?

(Ohje: Merkitse lukua esimerkiksi kirjaimella a .)

204. Laske päässä.

- a) $4^3 \cdot 2,5^3$
- b) $\frac{777^2}{111^2}$

205. Sievennä.

- a) $b^5 \cdot b^8$
- b) $\frac{x^{13}}{x^9}$
- c) $(x^4)^5$

206. Taulukossa on luvun 5 potensseja. Laske taulukon avulla.

a) $15\,625 \cdot 25$ b) $\frac{1\,953\,125}{3\,125}$ c) 125^3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5^n	5	25	125	625	3 125	15 625	78 125	390 625	1 953 125

207. Sievennä.

a) $(5r)^3 - 5r^3$ b) $(5r)^3 (-5r^3)$
 c) $2r(2r^2)^3$

208. Sievennä.

a) $\frac{15x^{15}}{3x^3}$ b) $\frac{(2x^3)^4}{6x^4}$
 c) $\frac{x(2x)^3}{(6x)^2}$

209. Laske lausekkeen x^5 arvo kolmen numeron tarkkuudella, kun $x = 7,1 \cdot 10^{200}$.

210. Luvut 16 ja 32 ovat luvun 2 potensseja, $16 = 2^4$ ja $32 = 2^5$. Ilmaise luvun 2 potenssina

a) $16 \cdot 32$ b) 32^5
 c) $16^3 \cdot 32^4$ d) $\frac{32^9}{16^{10}}$

211. Osoita käyttämättä laskinta, että luku 7^{2000} on pienempi kuin luku 50^{1000} .

212. Laske.

a) $2^{1001} \cdot 5^{1002} \cdot 0,1^{1000}$
 b) $8^{2002} \cdot 0,5^{6000}$
 c) $\frac{25^{801}}{5^{1599}}$

213. Tietokoneen muistin koko ilmaistaan muistiin mahtuvien tavujen* lukumääränä. Tällöin käytetään etuliitteellisiä yksiköitä kilotavu (kt), megatavu (Mt) ja gigatavu (Gt). Etuliite kilo ei tässä yhteydessä tarkoita perusyksikön tuhatkertaista määrää, vaan se tarkoittaa 2^{10} - eli 1024-kertaista määrää. Edelleen mega on kilo kiloa ja giga on kilo megaa.

a) Kuinka monta tavua ovat yksi megatavu ja yksi gigatavu? Ilmaise tavujen määrät myös luvun 2 potensseina.
 b) 1980-luvun alkupuolella kotitietokoneen massamuistina oli yksi 360 kilotavun levyke. Tällä hetkellä (vuosi 2004) tyypillisessä uudessa kotikoneessa on 120 gigatavun kiintolevy. Kuinka moninkertaiseksi kotitietokoneen massamuistin koko on 20 vuodessa tullut?

SARJA II.

PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

214. Laske.

a) $(-3 + 2)^2$ b) $(-3)^2 + 2^2$
 c) $-3^2 + 2^2$ d) $-3^2 \cdot (-2)^3$

* Yksi tavu on kahdeksan bitin jono. Yksi bitti (sanasta binary unit) on kaksijärjestelmän (katso sivu 69) numeromerkki, siis 0 tai 1. Kaikki tieto on tietokoneen muistissa nollien ja ykkösten jonoina.

215. Laskea) lausekkeen $x^2 - 4x - 1$ arvo muuttujan x arvolla $-\frac{1}{3}$ b) lausekkeen $-x^2 + 3x - 2$ arvo muuttujan x arvolla $\frac{1}{2}$.**216.** Laske.a) $2 \cdot 5^4$ b) $(2 \cdot 5)^4$ c) $2 \cdot 10^3 - 20^3$ **217.** Laske.a) $7 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3$ b) $7 \cdot \frac{2}{7^3}$ c) $7 \cdot \left(1\frac{1}{7}\right)^3$ **218.** Merkitse ja sievennä lauseke.a) lukujen -3 ja a tulon neliöb) luvun -3 ja luvun a neliön tuloc) luvun a puolikkaan kuutio.**219.** Sievennä.a) $(-4a)^3$ b) $\left(\frac{2x}{3}\right)^4$ c) $\left(-\frac{1}{5x}\right)^3$ **220.** Suureen r arvo kasvaa 30 %. Kuinka suureesta r riippuvan suureen t arvo muuttuu, jos suure t ona) suoraan verrannollinen suureen r kuutioonb) kääntäen verrannollinen suureen r neliöön?**221.** Laske potenssikaavojen avulla ilman laskinta.a) $5^6 \cdot 4^6 \cdot 0,5^6$ b) $\frac{7^3}{28^3}$ **222.** Sievennä.a) $(-3x^4)^2$ b) $-5x(-5x^3)^2$ c) $\frac{(5x^2)^3}{25x^2}$ **223.** Sievennä.a) $xy(x^3y)^2$ b) $\frac{(xy)^6}{xy^6}$ c) $\frac{(-x^2y^3)^5}{x(y^2)^4}$ **224.** Sievennä.a) $-a^4(-a)^4$ b) $-a^3(-a)^3$ c) $(-a)^4(-a^2)^3$ d) $-a^4(-a^3)^2$ **225.** Olkoon $u = 6,9 \cdot 10^{1012}$ ja $v = 2,7 \cdot 10^{16}$. Laske kahden numeron tarkkuudellaa) uv b) $\frac{u}{v}$.**226.** Ilmaise luvun 2 potenssina.a) $2 \cdot 8^7$ b) $8^{10} \cdot 16^{10}$ c) $\frac{16^4}{2}$ d) $\frac{16^{20}}{8^{10}}$ **227.** Laske.a) $\frac{100^{630}}{10^{1256}}$ b) $\frac{100^{601}}{1000^{400}}$ **228.** Osoita, että lausekkeen $\frac{2^n 4^{n+5}}{8^{n+1}}$ arvo ei riipu positiivisen kokonaisluvun n arvosta.**229.** Sievennä lauseke.a) $x^n x^n$ b) $\frac{x^{2n}}{x^2}$ c) $\frac{x^{2n+1}}{x^n x^n}$ d) $\frac{x^n x^n}{x^n + x^n}$ **230.** Päätele käyttämättä laskinta, kumpi luvuista 5^{2000} ja 3^{3000} on suurempi.

231. Laske luvun 7^{1500} likiarvo kolmen numeron tarkkuudella. Kuinka monta numeroa luvussa on?

232. Suurimpia nimettyjä lukuja on *googol*: ykkönen ja sen jälkeen sata nollaa.* Merkitse googol kymmenpotenssimuodossa. Kuinka monta nollaa seuraa ykköstä luvussa

- a) 10^{googol} (ns. *googolplex*)
- b) $\text{googol} \cdot \text{googol}$
- c) googol^{10}
- d) $\text{googol}^{\text{googol}}$
- e) $\text{googolplex}^{\text{googol}}$
- f) $\text{googol}^{\text{googolplex}}$
- g) $\text{googolplex}^{\text{googolplex}}$
- h) Maailmankaikkeuden alkeishiukkasten lukumäärä on noin 10^{80} . Onko mahdollista kirjoittaa kokonaisuudessaan luku *googolplex*?

233. Vuonna 1961 löydettiin ensimmäinen yli tuhatnumeroinen alkuluku $2^{4253} - 1$. Kuinka monta numeroa luvussa on? Mitkä ovat luvun kolme ensimmäistä numeroa?

* Luvun nimesi amerikkalaisen matemaatikon Edward Kasnerin yhdeksänvuotias sisarenpoika vuonna 1938. Internetin hakukokeen nimi Google on johdettu lukusanasta googol.

Negatiivinen eksponentti ja eksponentti nolla

Matematiikassa laajennetaan käsitteitä uusiin tilanteisiin usein käyttämällä ns. *laskulakien säilymisperiaatetta*: määritelmä asetetaan niin, että aikaisemmat laskulait ovat voimassa myös uusissa tilanteissa. Seuraavassa käytetään tätä periaatetta ja määritellään potenssit, joiden eksponentti on negatiivinen kokonaisluku tai nolla.

JOHDANTOESIMERKKI 1

Olkoon $a \neq 0$ ja olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja. Oletetaan, että samankantaisten potenssien osamäärän kaava $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ pätee myös silloin, kun osoittajan eksponentti m on pienempi tai yhtä suuri kuin nimittäjän eksponentti n . Päätele, mitä tarkoittaa potenssi a) a^{-3} b) a^0 .

Ratkaisu

a) Tutkitaan esimerkiksi osamäärää $\frac{a^2}{a^5}$. Koska $a \neq 0$, osamäärä on määritelty. Sievennetään lauseke potenssikaavalla.

$$\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3} \quad \text{Oletettiin, että kaava } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ pätee myös silloin, kun } m \leq n.$$

Lauseke $\frac{a^2}{a^5}$ voidaan sieventää myös supistamalla:

$$\frac{a^2}{a^5} = \frac{\overset{1}{a}\overset{1}{a}}{\underset{1}{a}\underset{1}{a}aaa} = \frac{1}{a^3}.$$

$$\text{Siis } a^{-3} = \frac{1}{a^3}.$$

b) Tutkitaan esimerkiksi osamäärää $\frac{a^4}{a^4}$. Koska $a \neq 0$, osamäärä on määritelty. Sievennetään lauseke potenssikaavalla.

$$\frac{a^4}{a^4} = a^{4-4} = a^0$$

Lauseke $\frac{a^4}{a^4}$ voidaan sieventää myös supistamalla:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{a^4}}}{\underset{1}{\cancel{a^4}}} = 1.$$

Siis $a^0 = 1$.

Vastaus

a) $\frac{1}{a^3}$ b) 1

Potenssin määritelmä, kun eksponentti on 0 tai negatiivinen kokonaisluku

Oletetaan, että $a \neq 0$. Luvun a potenssi a^0 ja potenssit a^{-n} , missä n on positiivinen kokonaisluku, määritellään seuraavasti.

$$a^0 = 1$$

Potenssin a^0 arvo on 1.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Potenssi a^{-n} on potenssin a^n käänteisluku.

Erityisesti, koska $a^1 = a$, niin

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Potenssi a^{-1} on luvun a käänteisluku.

Potensseja a^0 ja a^{-n} ei määritellä, kun $a = 0$.

ESIMERKKI 2

Laske.

a) $(-17)^0$ b) 2^{-5} c) 12^{-1}

Ratkaisu

a) $(-17)^0 = 1$

Kun eksponentti on 0, potenssin arvo on 1.

b) $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

Potenssin 2^5 käänteisluku.

c) $12^{-1} = \frac{1}{12}$

Luvun 12 käänteisluku.

Vastaus

a) 1 b) $\frac{1}{32}$ c) $\frac{1}{12}$

ESIMERKKI 3

Sievennä a) $6 \cdot (-3)^{-2}$ b) $x(5x)^{-2}$.

Ratkaisu

a) $6 \cdot (-3)^{-2} = 6 \cdot \frac{1}{(-3)^2}$

Laskujärjestyssääntöjen mukaisesti potenssi lasketaan ensin.

$$= 6 \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

b) $x(5x)^{-2} = x \cdot \frac{1}{(5x)^2}$

Potenssi lasketaan ensin.

$$= x \cdot \frac{1}{5^2 x^2}$$

$$= \frac{\cancel{x}^1}{25 \cancel{x}^2} = \frac{1}{25x}$$

Vastaus

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{25x}$

Koska $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$, potenssi a^{-n} voidaan tulkita myös toisin.

Toinen tapa tulkita potenssit a^{-n}

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Potenssi a^{-n} on luvun a käänteisluvun n . potenssi ($a \neq 0$).

ESIMERKKI 4

Laske $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$.

Ratkaisu

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

Luvun $\frac{5}{3}$ käänteisluvun $\frac{3}{5}$ neliö.

$$= \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

Vastaus

$$\frac{9}{25}$$

ESIMERKKI 5

Laske a) 10^{-5} b) $7,2 \cdot 10^{-6}$.

Ratkaisu

$$\text{a) } 10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100\,000} = 0,000\,01 \quad \text{yksi sadastuhannesosa}$$

$$\text{b) } 7,2 \cdot 10^{-6} = 7,2 \cdot \frac{1}{10^6} \quad 7,2 \text{ miljoonasosaa}$$

$$= 7,2 \cdot 0,000\,001 = 0,000\,007\,2$$

Vastaus

$$\text{a) } \frac{1}{100\,000} = 0,000\,01 \quad (\text{yksi sadastuhannesosa})$$

$$\text{b) } 0,000\,007\,2$$

Kymmenpotenssimuoto $a \cdot 10^{-n}$

Pieniä positiivisia lukuja merkitään usein kymmenpotenssimuodossa $a \cdot 10^{-n}$, missä n on positiivinen kokonaisluku ja kerroin a on vähintään yksi ja pienempi kuin kymmenen: $1 \leq a < 10$.

ESIMERKKI 6

Vetyatomien massa on $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

- Kirjoita vetyatomien massa ilman kymmenen potenssia.
- Kuinka monta vetyatomia on yhdessä milligrammassa vetyä?

Ratkaisu

- Potenssi 10^{-27} tarkoittaa lukua $\frac{1}{10^{27}}$. Luvun $\frac{1}{10^{27}}$ desimaalimuodossa on pilkun jälkeen ensin 26 nollaa ja 27. numero on 1.

$$\begin{aligned} 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} &= 1,67 \cdot 0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001 \text{ kg} \\ &= 0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,67 \text{ kg} \end{aligned}$$

- Milligramma on gramman tuhannesosa, joten

$$1 \text{ mg} = 0,001 \text{ g} = 0,000\,001 \text{ kg}$$

eli kymmenpotenssimuodossa

$$1 \text{ mg} = 10^{-3} \text{ g} = 10^{-6} \text{ kg}.$$

Atomien lukumäärä yhdessä milligrammassa vetyä on *

$$\frac{10^{-6}}{1,67 \cdot 10^{-27}} \approx 5,99 \cdot 10^{20}.$$

Vastaus

- 0,000 000 000 000 000 000 000 000 001 67 kg
- noin $5,99 \cdot 10^{20}$ kappaletta

* Luku $1,67 \cdot 10^{-27}$ voidaan näppäillä laskimeen käyttäen näppäintä **(EXP)** (tai **(EE)** tai vastaava). Laskimesta riippuen eksponentin etumerkki näppäillään laskimeen joko ennen eksponenttia tai eksponentin jälkeen. Näppäillään:

$$1.67 \text{ (EXP) (-) } 27 \text{ tai } 1.67 \text{ (EXP) } 27 \text{ (}\pm\text{)}$$

ESIMERKKI 7

Kirjoita luku 0,000 346 kymmenpotenssimuodossa.

Ratkaisu

$$0,000\,346$$

$$= 3,46 \cdot 0,000\,1$$

$$= 3,46 \cdot 10^{-4}$$

Ykkönen on neljäs numero pilkun jälkeen.

Vastaus

$$3,46 \cdot 10^{-4}$$

249. Mitkä kohtien a - d lausekkeista tarkoittavat samaa kuin lauseke $\frac{1}{3x^5}$?

- a) $(3x)^{-5}$ b) $\frac{1}{3}x^{-5}$
 c) $3x^{-5}$ d) $\frac{x^{-5}}{3}$

250. Laske.

- a) $8 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$
 b) $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^0$

251. Ilmaise luku potenssina, jonka kantaluku on 2.

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$
 c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{2^{31}}$
 e) $\left(\frac{1}{2}\right)^7$

252. Massahiihdon osanottajamäärä on vuosittain kaksinkertaistunut. Osanottajamäärä on nyt 8 500. Kuinka suuri osanottajamäärä oli

- a) vuosi sitten
 b) viisi vuotta sitten
 c) n vuotta sitten?

Käytä c-kohdan lausekkeessa negatiivista eksponenttia.

253. a) Laske

$$7 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-4}.$$

b) Kirjoita luku 503,706 summaksi a-kohdan tapaan.

254. a) Kirjoita ilman kymmenen potenssia pionin (eräs alkeishiukkanen) elinikä $2,60 \cdot 10^{-8}$ s.

b) Kirjoita kymmenpotenssimuodossa luvut 0,000 032 ja 0,901

255. Määritä luvun $0,2^{110}$ likiarvo kolmen numeron tarkkuudella. Kuinka monta peräkkäistä nollaa seuraa desimaalipilkkua luvun $0,2^{110}$ desimaalimuodossa?

256. Auringon massa on $1,99 \cdot 10^{33}$ g ja vetyatomien massa $1,67 \cdot 10^{-24}$ g. Kumpi on suurempi, oman massasi suhde vetyatomien massaan vai auringon massan suhde omaan massaasi?

257. Luonnontieteissä ja tekniikassa käytetään pienille positiivisille luvuille usein esitysmuotoa $a \cdot 10^{-n}$, jossa eksponentti n on luvun 3 monikerta ja kerroin a on välillä $1 \leq a < 1000$. Taulukossa ovat näihin esitysmuotoihin liittyvät etuliitteet.

kymmenen potenssi	etuliite	lyhenne
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	mikro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	piko	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

Kirjoita sopivaa etuliitettä käyttäen

a) 0,000 1 g (suurin sallittu kadmiumin määrä kilogrammassa viljaa)

b) $2,5 \cdot 10^{-7}$ m (herpesviruksen läpimitta).

258. Kirjoita kymmenpotenssimuodossa ja ilman kymmenen potenssia

- a) 15 µg (aikuisen päivittäinen B12-vitamiinin tarve)
- b) 33,4 ps (aika, joka valolta kuluu yhden senttimetrin matkaan).

259. EU-normien mukaan suurin kaloissa sallittu dioksiinin määrä on neljä pikogrammaa grammassa kalan tuorepainoa. Itämeren silakoissa ja lohissa dioksiinin määrä on normiin verrattuna kolminkertainen. Itämeren silakoiden kokonaismassan arvioidaan olevan 400 000 tonnia. Kuinka suuri on Itämeren silakoissa olevan dioksiinin kokonaismäärä?

260. Edellisessä luvussa käsiteltyt potenssikaavat pitävät paikkansa myös silloin, kun eksponentti on nolla tai negatiivinen kokonaisluku.

Kaavat voidaan perustella muuttamalla negatiiviset eksponentit määritelmän mukaisesti positiiviseksi ja soveltamalla sen jälkeen edellisen luvun potenssikaavoja. Mielikuvan todistusmenetelmästä saat, kun osoitat tosiksi kaavojen seuraavat erikoistapaukset.

- a) $(ab)^{-8} = a^{-8}b^{-8}$
- b) $a^{-19} \cdot a^{23} = a^{-19+23}$
- c) $(a^3)^{-4} = a^{-12}$

261. Laske kolmen numeron tarkkuudella.

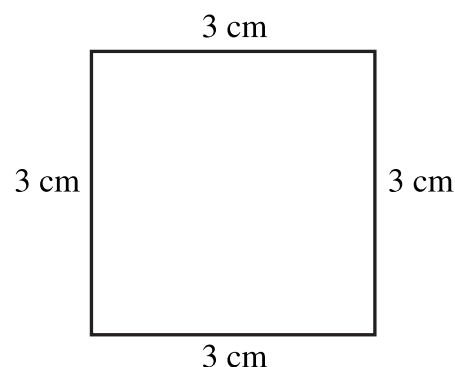
- a) $(7,30 \cdot 10^{-98})^{25}$
- b) $0,5^{4000}$

Käytä potenssikaavoja (katso edellinen tehtävä).

Neliöjuuri

Ongelma 1

Neliön sivun pituus on 3 cm.
Laske neliön pinta-ala.



Ongelma 2

Piirrä neliö, jonka pinta-ala on a) 25 cm^2 b) 12 cm^2 .

Ongelma 3

Minkä luvun neliö on a) luku 0 b) luku -9 ?

Ongelma 4

Määritä kaikki luvut, joiden neliö on 16.

Lukua 0 ja positiivisia lukuja kutsutaan *epänegatiivisiksi* luvuiksi. Siis luku c on epänegatiivinen, kun $c \geq 0$.

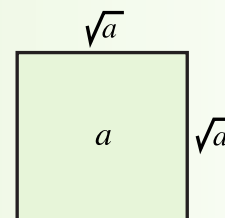
Neliöjuuren määritelmä

Luvun a *neliöjuuri* on epänegatiivinen luku, jonka neliö on a . Luvun a neliöjuuri merkitään $\sqrt{a}$.^{*} Siis

$$(\sqrt{a})^2 = a \text{ ja } \sqrt{a} \geq 0.$$

Geometrisesti tulkittuna positiivisen luvun a neliöjuuri on sen neliön sivun pituus, jonka pinta-ala on a .

Luvun 0 neliöjuuri on 0, sillä $0^2 = 0$.
Siis $\sqrt{0} = 0$.



^{*} Neliöjuuri on englanniksi *square root*, ranskaksi *racine carrée*, saksaksi *Quadratwurzel*. Kaikki koostuvat sanoista neliö ja juuri. Neliöjuurimerkki $\sqrt{}$ on tyylitelty pienestä r-kirjaimesta, joka aloittaa latinan kielen juurta tarkoittavan sanan *radix*. Tästä sanasta ovat suomen kieleen johtuneet mm. sanat radikaali ja retiisi.

Koska luvun neliö on aina epänegatiivinen, niin vain epänegatiivisilla luvuilla on neliöjuuri.

Neliöjuuren määrittelyehto

Luvun a neliöjuuri $\sqrt{a}$ on määritelty, kun $a \geq 0$.

ESIMERKKI 1

Määritä

- a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ c) $\sqrt{13}$ d) $-\sqrt{49}$ e) $\sqrt{-49}$.

Perustele.

Ratkaisu

- a) $\sqrt{64} = 8$, sillä $8^2 = 64$, ja luku 8 on epänegatiivinen.
- b) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, sillä $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, ja luku $\frac{2}{3}$ on epänegatiivinen.
- c) Luku $\sqrt{13}$ ei ole rationaaliluku (kokonais- tai murtoluku), joten sen desimaalimuoto on päättymätön ja jaksoton.* Laskimella voidaan siis määrittää ainoastaan luvun $\sqrt{13}$ likiarvoja. Merkintä $\sqrt{13}$ on ainoa tapa merkitä luvun 13 neliöjuuri tarkasti. Siis luvun 13 neliöjuuren tarkka arvo on $\sqrt{13}$.
- d) Merkintä $-\sqrt{49}$ tarkoittaa luvun 49 neliöjuuren vastalukua. Luvun 49 neliöjuuri on 7. Neliöjuuren vastaluku on -7 . Siis $-\sqrt{49} = -7$.
- e) Negatiivisella luvulla -49 ei ole neliöjuurta. $\sqrt{-49}$ ei ole määritelty.

Vastaus

- a) 8 b) $\frac{2}{3}$ c) $\sqrt{13}$ d) -7 e) Ei määritelty.

* Lukuja, jotka eivät ole rationaalilukuja eli joita ei voida kirjoittaa murtolukumuodossa, kutsutaan *irrationaaliluvuiksi*. Irrationaalilukuihin perehdytään tarkemmin kurssissa Polynomifunktiot. Syventävässä kurssissa Logiikka ja lukuteoria opitaan todistamaan, että luku $\sqrt{13}$ on irrationaaliluku. Yleisesti pitää paikkansa: jos kokonaisluvun neliöjuuri ei ole kokonaisluku, se on irrationaaliluku.

ESIMERKKI 2

Laske.

a) $(\sqrt{5})^2$ b) $(-\sqrt{3})^2$ c) $(5\sqrt{7})^3$

Ratkaisu

a) Luvun 5 neliöjuuren neliö on 5. Siis

$$(\sqrt{5})^2 = 5. \quad (\sqrt{a})^2 = a$$

b) Luvulla ja sen vastaluvulla on sama neliö. Koska $(\sqrt{3})^2 = 3$, niin myös $(-\sqrt{3})^2 = 3$.

c) $(5\sqrt{7})^3 = 5\sqrt{7} \cdot 5\sqrt{7} \cdot 5\sqrt{7}$ Potenssi puretaan tuloksi.

$$= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$$

$$= 125 \cdot (\sqrt{7})^2 \cdot \sqrt{7} \quad (\sqrt{a})^2 = a$$

$$= 125 \cdot 7 \cdot \sqrt{7} = 875\sqrt{7}$$

Vastaus

a) 5 b) 3 c) $875\sqrt{7}$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

262. Merkitse luvun neliöjuuri ja määritä neliöjuuren tarkka arvo.

- a) 81 b) 121 c) 17

263. Merkitse lausekkeena ja laske

- a) luvun 25 neliöjuuren vastaluku
b) lukujen 16 ja 9 summan neliöjuuri
c) lukujen 16 ja 9 neliöjuurien summa.

264. Määritä.

- a) $\sqrt{0}$ b) $\sqrt{1}$ c) $\sqrt{10}$
d) $\sqrt{-100}$ e) $-\sqrt{100}$

265. Määritä.

- a) $\sqrt{\frac{1}{49}}$ b) $\sqrt{\frac{9}{16}}$ c) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

266. Määritä.

- a) $\sqrt{7^2}$ b) $\sqrt{\left(\frac{7}{13}\right)^2}$ c) $\sqrt{\pi^2}$

267. Määritä.

- a) $\sqrt{20^2} + \sqrt{21^2}$ b) $\sqrt{20^2 + 21^2}$
c) $\sqrt{(61 - 60)^2}$ d) $\sqrt{61^2 - 60^2}$

268. Laske.

- a) $(\sqrt{17})^2$ b) $\frac{1}{(\sqrt{13})^2}$ c) $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2$

269. Laske.

- a) $(3\sqrt{7})^2$ b) $(-\sqrt{5})^3$ c) $(4\sqrt{5})^3$

270. Kuinka pitkä on neliön sivu, jos neliön pinta-ala on

- a) 2,5 m² b) 25 m² c) 250 m²?

271. Jos paistolämpötila on sama, niin kinkun kypsyttämiseen tarvittava aika on suoraan verrannollinen kinkun massan neliöjuureen. Missä ajassa kypsyy a) 12 kilon b) 15 kilon kinkku lämpötilassa, jossa 7,5 kilon kinkun kypsymiseen kului 6,5 tuntia?

272. Minkä luvun neliöjuuri luku on?

- a) 7 b) -10
c) 25 d) $\sqrt{4} + \sqrt{9}$

273. Määritä luvun neliön neliöjuuri.

- a) 17 b) -13
c) $\sqrt{11}$ d) $-\sqrt{10}$

Päättele edelleen millä a :n arvoilla

e) luvun neliön neliöjuuri on luku itse eli

$$\sqrt{a^2} = a$$

f) luvun neliön neliöjuuri on luvun vastaluku eli $\sqrt{a^2} = -a$.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

274. Määritä.

- a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{37}$
c) $-\sqrt{49}$ d) $\sqrt{-81}$

275. Määritä.

- a) $\sqrt{\frac{1}{81}}$ b) $\sqrt{\frac{49}{64}}$ c) $\sqrt{9\frac{49}{64}}$

276. Laske.

- a) $\sqrt{36 + 64}$ b) $\sqrt{36} + \sqrt{64}$
c) $\sqrt{169 - 144}$ d) $\sqrt{144} - \sqrt{169}$
e) $\sqrt{144 - 169}$

277. Laske.

- a) $\sqrt{25^2}$ b) $\sqrt{312^2}$
 c) $\sqrt{25^2 + 312^2}$

278. Laske.

- a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}$ b) $(\sqrt{10})^2$
 c) $(7\sqrt{10})^2$ d) $(\sqrt{10})^3$
 e) $(-7\sqrt{10})^3$

279. Laske.

- a) $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2$ b) $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^3$

280. Minkä luvun neliöjuuri luku on?

- a) 4 b) 17 c) -1
 d) $2 - \pi$ e) $\pi - 2$

281. Asuinpinta-ala Suomessa on 38 m^2 jokaista asukasta kohden. Suomalaisia on 5,3 miljoonaa (vuosi 2004). Jos kaikki Suomen asunnot koottaisiin yhdeksi neliön muotoiseksi asunnoksi, niin mikä olisi tämän neliön sivun pituus?

282. Neliön muotoisen lattian päällystämiseen kului 250 metriä 15 cm:n levyistä lautoja. Mitkä ovat lattian mitat?

283. Nopeus, jolla ääni etenee ilmassa, on suoraan verrannollinen absoluuttisen lämpötilan neliöjuureen. Absoluuttinen lämpötila on $273,15$ astetta suurempi kuin Celsius-asteikolla mitattu lämpötila. Kun lämpötila on 0°C , äänen nopeus on 331 m/s . Mikä on äänen nopeus

- a) kireällä -30°C :n pakkasella
 b) 30°C :n helteellä?

284. Kurssissa Todennäköisyyslaskenta ja tilastot osoitetaan seuraava ns. *syntymäpäiväparadoksi*: Jotta ihmisryhmässä olisi yli 50 %:n todennäköisyydellä ainakin kahdella jäsenellä sama syntymäpäivä, riittää, että ryhmässä on vähintään 23 jäsentä. (Oletetaan, että ryhmässä ei ole kaksosia, ja syntymäpäivää 29.2. ei oteta huomioon.)*

Monilla sovellusaloilla on tärkeä seuraava syntymäpäiväparadoksin yleistys: Jos erilaisia ominaisuuksia tms. on n erilaista ja jokaisen henkilön tms. ominaisuus määräytyy satunnaisesti niin, että kaikki ominaisuudet ovat yhtä todennäköisiä, niin kuinka suuri ryhmän tulee vähintään olla, jotta yli 50 %:n todennäköisyydellä ainakin kahdella olisi sama ominaisuus? On osoitettu, että ryhmän pienin koko on likimain suoraan verrannollinen ominaisuuksien lukumäärän n neliöjuureen.

a) Oletetaan, että erästä ihmisen geeniominaisuutta on 1 000 000 erilaista ja että ominaisuus määräytyy satunnaisesti ja kaikki ominaisuudet ovat yhtä todennäköisiä. Kuinka suuren tulee ryhmän olla, jotta ryhmässä olisi yli 50 %:n todennäköisyydellä ainakin kahdella sama geeniominaisuus?

b) Oletetaan, että kaikki lottoajat täyttävät yhden lottorivin arpomalla. Kuinka monta henkeä vähintään tulee ryhmässä olla, jotta yli 50 %:n todennäköisyydellä ainakin kahdella olisi sama lottorivi. Kurssissa Todennäköisyyslaskenta ja tilastot lasketaan, että erilaisten lottorivien lukumäärä on 15 380 937.

* Paradoksilla tarkoitetaan yleensä järjenvastaista väitettä. Tässä tapauksessa nimitys johtuu siitä, että lukumäärä 23 on yllättävän pieni.

285. Määritä viisi pienintä positiivista kokonaislukua, joiden

- a) neliöjuuren neliöjuuri
 - b) neliöjuuren neliöjuuren neliöjuuri
- on luonnollinen luku.

286. Määritä neliöjuuren tarkka arvo. Perustele tulos korottamalla neliöön.

- a) $\sqrt{3^{10}}$
- b) $\sqrt{3^{826}}$

(Vihje: potenssin potenssin kaava.)

287. a) Osoita, että jos positiivisen kokonaisluvun viimeinen numero on 2, niin luvun neliöjuuri ei ole kokonaisluku.

- b) Mitkä ovat muut viimeiset numerot, joista voidaan päätellä, että luvun neliöjuuri ei ole kokonaisluku?

Neliöjuurilla laskeminen

Ongelma 1

Laske. a) $(\sqrt{2}\sqrt{5})^2$ b) $\left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}\right)^2$

Luvun osoittaminen neliöjuureksi

Luvun a neliöjuuri on epänegatiivinen luku, jonka neliö on a .

Jos väitetään, että luku b on a :n neliöjuuri, väite perustellaan osoittamalla, että luku b toteuttaa seuraavat kaksi ehtoa.

$$1^\circ \quad b^2 = a \quad b\text{:n neliö on } a.$$

$$2^\circ \quad b \geq 0 \quad b \text{ on epänegatiivinen.}$$

ESIMERKKI 1

Oletetaan, että a ja b ovat epänegatiivisia lukuja. Osoita, että $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Ratkaisu

Tehtävänä on osoittaa, että lukujen a ja b neliöjuurien tulo $\sqrt{a}\sqrt{b}$ on tulon ab neliöjuuri. Pitää siis osoittaa, että luku $\sqrt{a}\sqrt{b}$ toteuttaa seuraavat kaksi ehtoa.

$$1^\circ \quad (\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = ab \quad \text{Luvun } \sqrt{a}\sqrt{b} \text{ neliö on } ab.$$

$$2^\circ \quad \sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0 \quad \text{Luku } \sqrt{a}\sqrt{b} \text{ on epänegatiivinen.}$$

Ehto 1°. Lasketaan:

$$\begin{aligned} (\sqrt{a}\sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a})^2 (\sqrt{b})^2 && \text{Tulon potenssin kaava.} \\ &= ab && \text{Neliöjuuren määritelmän nojalla } (\sqrt{a})^2 = a \text{ ja } (\sqrt{b})^2 = b. \end{aligned}$$

Siis luvun $\sqrt{a}\sqrt{b}$ neliö on ab .

Ehto 2°.

Koska $\sqrt{a} \geq 0$ ja $\sqrt{b} \geq 0$, niin $\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$. Kahden epänegatiivisen luvun tulo on epänegatiivinen.

Siis luku $\sqrt{a}\sqrt{b}$ on epänegatiivinen.

Koska luku $\sqrt{a}\sqrt{b}$ täyttää luvun ab neliöjuurelta vaaditut ehdot, niin $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Neliöjuurien tulon ja neliöjuurien osamäärän kaavat

Olkoot a ja b epänegatiivisia lukuja, eli $a \geq 0$ ja $b \geq 0$.

Tällöin:

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

Neliöjuurien tulo on tulon neliöjuuri.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Neliöjuurien osamäärä on osamäärän neliöjuuri ($b > 0$).

Jälkimmäisen kaavan todistaminen on tehtävänä 313.

ESIMERKKI 2

Sievennä a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$ b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$.

Ratkaisu

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} &= \sqrt{3 \cdot 5} & \sqrt{a}\sqrt{b} &= \sqrt{ab} \\ &= \sqrt{15} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

Vastaus

$$\text{a) } \sqrt{15} \quad \text{b) } 4$$

ESIMERKKI 3

Sievennä $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$.

Ratkaisu

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Vastaus

$$\sqrt{3}$$

Ongelma 2

Tiina muistaa likiarvon $\sqrt{2} \approx 1,41$. Kun tarvittiin likiarvoa luvulle $\sqrt{200}$, eikä laskinta löytynyt, joku huomasi kysyä Tiinalta. Tiina vastasi heti. Mitä?

Kokonaislukujen neliöjuuret pyritään yleensä sieventämään muotoon, jossa juurettavana on mahdollisimman pieni kokonaisluku. Sieventäminen on mahdollista, jos kokonaisluvulla on tekijänä toisen kokonaisluvun neliö.

ESIMERKKI 4

Sievennä $\sqrt{75}$.

Ratkaisu

Huomataan, että $75 = 25 \cdot 3$, missä luku 25 on kokonaisluvun neliö.*

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3}$$

Käytetään tulon neliöjuurikaavaa toiseen suuntaan:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

$$= \sqrt{25}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Vastaus

$$5\sqrt{3}$$

* Sievennysten huomaamista auttaa ensimmäisistä neliöluvuista tehty luettelo: 4, 9, 16, 25 jne.

ESIMERKKI 5

Sievennä.

a) $\sqrt{3}(4\sqrt{7} - 2\sqrt{3})$ b) $4\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$

c) $\sqrt{45} - \sqrt{20}$

Ratkaisu

a) $\sqrt{3}(4\sqrt{7} - 2\sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{7} - \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$

Käytetään osittelulakia

$a(b + c) = ab + ac.$

$= 4\sqrt{3}\sqrt{7} - 2\sqrt{3}\sqrt{3}$

Kertolaskun vaihdantalaaki $ab = ba.$

$= 4\sqrt{21} - 2 \cdot 3$

$= 4\sqrt{21} - 6$

b) $4\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$

Yhdistetään termit, joissa on saman luvun neliöjuuri käyttämällä osittelulakia $ba + ca = (b + c)a.$

$= (4 - 7)\sqrt{3} + (-5 + 6)\sqrt{2} = -3\sqrt{3} + \sqrt{2}$

c) $\sqrt{45} - \sqrt{20} = \sqrt{9 \cdot 5} - \sqrt{4 \cdot 5}$

Molemmat juuret ovat 45 ja 20 ovat kokonaisluvun neliön ja luvun 5 tuloja.

$= \sqrt{9}\sqrt{5} - \sqrt{4}\sqrt{5}$

$= 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$

Vastaus

a) $4\sqrt{21} - 6$ b) $-3\sqrt{3} + \sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

288. Sievennä.

- a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$
 c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

289. Sievennä.

- a) $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$
 c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$

290. Sievennä.

- a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{50}$ c) $\sqrt{500}$

291. Käytä hyväksesi likiarvoja $\sqrt{3} \approx 1,73$ ja $\sqrt{30} \approx 5,48$ ja laske ilman laskinta neliöjuuren likiarvo.

- a) $\sqrt{300}$ b) $\sqrt{3\,000}$ c) $\sqrt{30\,000}$

292. Sievennä.

- a) $\frac{\sqrt{45}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{40}}{6}$ c) $\frac{\sqrt{80}}{8}$

293. Sievennä.

- a) $\sqrt{5}(2 + \sqrt{3})$ b) $\sqrt{3}(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$

294. Sievennä.

- a) $5\sqrt{3} - 9\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{5} - 7\sqrt{2} - \sqrt{5} + 5\sqrt{2}$

295. Sievennä.

- a) $\sqrt{5} + \sqrt{20}$ b) $\sqrt{5+20}$
 c) $\sqrt{12} - \sqrt{3}$ d) $\sqrt{12-3}$

296. Pitääkö kaava $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ paikkansa? Osoita kaava oikeaksi tai näytä esimerkiksi vääräksi.

297. Laske lausekkeen $x^3 - 4x^2 - 3x + 10$ arvo, kun $x = 3\sqrt{2}$.

298. Sievennä $\sqrt{300} - \sqrt{18} - \sqrt{27} + \sqrt{72}$.

299. Osoita, että $\sqrt{32} + \sqrt{2} = \sqrt{18} + \sqrt{8}$.
 (Ohje: Sievennä molempien puolien lausekkeet.)

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

300. Sievennä.

- a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{96}}$

301. Määritä lukujen $\sqrt{50}$ ja $\sqrt{2}$ tulo ja osamäärä.

302. Sievennä.

- a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{20}$
 c) $\sqrt{45}$ d) $\sqrt{75}$

303. Käytä hyväksesi likiarvoa $\sqrt{10} \approx 3,2$ ja laske luvun likiarvo ilman laskinta.

- a) $\sqrt{40}$ b) $\sqrt{1000}$ c) $\sqrt{\frac{5}{2}}$

304. Ratkaise yhtälö. Sievennä juuret.

- a) $x\sqrt{6} = \sqrt{2}$
 b) $2x - \sqrt{24} = 0$

305. Sievennä.

- a) $-\sqrt{6}(3\sqrt{6} - 4\sqrt{5})$
 b) $3\sqrt{5}(4\sqrt{15} - 7\sqrt{5} + 2\sqrt{7})$

306. Laske lausekkeen $x^3 - x^2 - 3x + 1$ arvo, kun

- a) $x = -\sqrt{2}$ b) $x = 2\sqrt{3}$.

307. Sievennä.

- a) $\sqrt{18} - \sqrt{8}$ b) $\sqrt{75} + \sqrt{3}$
 c) $\frac{\sqrt{80}}{2} - \frac{\sqrt{45}}{3}$

308. Sievennä.

- a) $\sqrt{12} + \sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{48}$
 b) $\sqrt{12+8} + \sqrt{50-48}$

309. Osoita, että

- a) $\sqrt{40} + \sqrt{90} = \sqrt{250}$
 b) $\sqrt{75} - \sqrt{12} = \sqrt{27}$.

310. Perinteinen neliöjuurilausekkeiden sieventämiskeino on ”neliöjuuren poistaminen nimittäjästä”. Jos jakajana on neliöjuuri, niin laennetaan sillä:

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

Kun laskettiin ilman laskimia ja neliöjuurien likiarvoja katsottiin taulukoista, neliöjuuren poistaminen nimittäjästä oli välttämätöntä, koska desimaaliluvulla jakaminen on työlästä. Nyt neliöjuuren poistamista nimittäjästä kannattaa harjoitella sen huomaamiseksi, että erinäköiset neliöjuurilausekkeet saattavat olla yhtä suuria. Poista neliöjuuri nimittäjästä.

- a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
 d) $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ e) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

311. Osoita, että $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Mitkä ovat

lukujen $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ja $\sqrt{\frac{1}{5}}$ vastaavat kaksi muuta muotoa?

312. Määritä kahden numeron tarkkuudella.

- a) $\sqrt{4,7 \cdot 10^{1026}}$ b) $\sqrt{9,0 \cdot 10^{1027}}$

313. Olkoon $a \geq 0$ ja $b > 0$. Osoita, että

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

314. Oletetaan, että luku b on epänegatiivinen.

Mikä ehto luvun a tulee täyttää, jotta olisi

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}?$$

$$\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}?$$

315. Mille luvuille pätee epäyhtälö $\sqrt{a} < a$?

Entä mille luvuille pätee epäyhtälö $\sqrt{a} > a$?

Perustele.

Neliöyhtälö

JOHDANTOESIMERKKI 1

Mitkä luvut toteuttavat yhtälön?

a) $x^2 = 9$ b) $x^2 = 7$ c) $x^2 = 0$ d) $x^2 = -4$

Ratkaisu

a) Yhtälön $x^2 = 9$ toteuttaa luvun 9 neliöjuuri 3, sillä $3^2 = 9$. Myös $(-3)^2 = 9$, joten yhtälön toinen juuri on luvun 3 vastaluku -3 .

Yhtälön toteuttavat luvut 3 ja -3 .

b) Yhtälön $x^2 = 7$ toteuttaa luvun 7 neliöjuuri, sillä $(\sqrt{7})^2 = 7$. Myös luvun 7 neliöjuuren vastaluku $-\sqrt{7}$ toteuttaa yhtälön, sillä $(-\sqrt{7})^2 = (\sqrt{7})^2 = 7$.

Yhtälön toteuttavat luvut $\sqrt{7}$ ja $-\sqrt{7}$.

c) Yhtälön $x^2 = 0$ toteuttaa luku 0. Yhtälöllä ei ole muita juuria.

d) Luvun neliö ei ole koskaan negatiivinen, joten yhtälöä $x^2 = -4$ ei toteuta mikään luku.

Vastaus

a) 3 ja -3 b) $\sqrt{7}$ ja $-\sqrt{7}$ c) 0 d) Ei mikään luku.

Neliöyhtälön $x^2 = a$ juuret

Yhtälön $x^2 = a$ juurten lukumäärä riippuu luvun a merkistä.

$$a > 0$$

Jos luku a on positiivinen, yhtälön $x^2 = a$ toteuttavat luvun a neliöjuuri ja sen vastaluku eli

$$x^2 = a, \text{ kun } x = \sqrt{a} \text{ tai } x = -\sqrt{a}$$

$$a = 0$$

Yhtälön $x^2 = 0$ toteuttaa vain luku 0 eli

$$x^2 = 0, \text{ kun } x = 0.$$

$$a < 0$$

Jos luku a on negatiivinen, yhtälöllä $x^2 = a$ ei ole juuria.

ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälö $3x^2 = 15$.

Ratkaisu

$$3x^2 = 15$$

| : 3

Ratkaistaan ensin neliö x^2 .

$$x^2 = 5$$

Yhtälön juuret ovat luvun 5 neliöjuuri ja sen vastaluku.

$$x = \sqrt{5} \text{ tai } x = -\sqrt{5}$$

Vastaukseksi annetaan tarkat arvot. Niistä voidaan tarvittaessa laskea likiarvot halutulla tarkkuudella.

Vastaus

$$x = \sqrt{5} \text{ tai } x = -\sqrt{5}$$

ESIMERKKI 3

Ympyrän pinta-ala on 28 m^2 . Kuinka pitkä ympyrän säde on?

Ratkaisu

Ympyrän pinta-ala lasketaan kaavalla πr^2 , missä r on ympyrän säde. Ratkaistaan yhtälö $\pi r^2 = 28$.

$$\pi r^2 = 28 \quad | : \pi$$

$$r^2 = \frac{28}{\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{28}{\pi}} \quad \text{tai} \quad r = -\sqrt{\frac{28}{\pi}}$$

Vain positiivinen juuri kelpaa säteen pituudeksi. Säteen pituus on

$$\sqrt{\frac{28}{\pi}} = 2,9854... \approx 3,0 \text{ (m)}.$$

Vastaus annetaan samalla kahden numeron tarkkuudella kuin lähtötieto 28 m^2 .

Vastaus

3,0 m

ESIMERKKI 4

Piirrä funktion x^2 kuvaaja. Päätele kuvaajasta

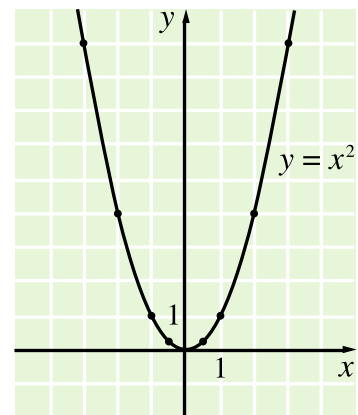
- luvun $\sqrt{7}$ likiarvo
- yhtälön $x^2 = 7$ juurten likiarvot.

Ratkaisu

Funktion x^2 kuvaaja muodostuu koordinaatiston pisteistä (x, y) , missä y -koordinaatti on x -koordinaatin neliö eli $y = x^2$.

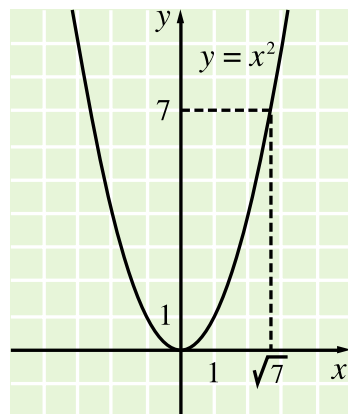
Valitaan muutama muuttujan x arvo ja määritetään vastaavat kuvaajan pisteet.

x	$y = x^2$	(x, y)
3	9	(3, 9)
2	4	(2, 4)
1	1	(1, 1)
0,5	0,25	(0,5; 0,25)
0	0	(0, 0)
-0,5	0,25	(-0,5; 0,25)
-1	1	(-1, 1)
-2	4	(-2, 4)
-3	9	(-3, 9)

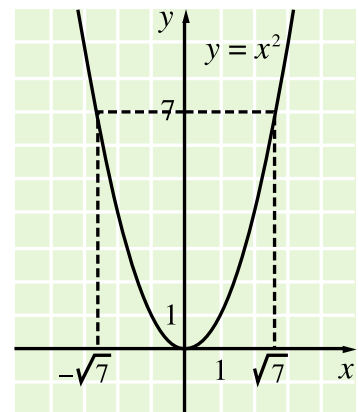


Koordinaatistoon hahmotellaan merkittyjen pisteiden kautta kulkeva käyrä. Piirretyn kuvaajan voi tarkistaa graafisella laskimella.

- Määritetään kuvaajan avulla epänegatiivinen luku, jonka neliö on 7. Luku on noin 2,6. Siis $\sqrt{7} \approx 2,6$.



- Funktion x^2 kuvaaja on symmetrinen y -akselin suhteet. Yhtälön $x^2 = 7$ juuret (luvun 7 neliöjuuri ja sen vastaluku) ovat kuvaajan perusteella noin 2,6 ja -2,6.



Vastaus

- 2,6
- 2,6 ja -2,6

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

316. Ratkaise yhtälö.

- a) $x^2 = 1$ b) $x^2 = 6$
 c) $2x^2 = 26$ d) $x^2 = -9$

317. Ratkaise yhtälö.

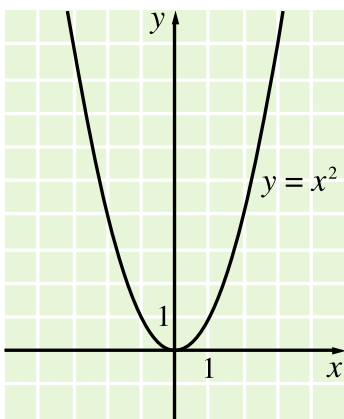
- a) $7x^2 = 0$ b) $5x^2 = 100$
 c) $\frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{15}$

318. Suomen sisävesien pinta-ala on $31\,600\text{ km}^2$. Mikä on samankokoisen

- a) neliön sivun pituus
 b) ympyrän halkaisija?

319. Määritä funktion x^2 kuvaajasta yhden desimaalin tarkkuudella

- a) yhtälön $x^2 = 8$ juuret
 b) yhtälön $x^2 = 3$ negatiivinen juuri.



320. Auton jarrutusmatkan pituus on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Poliisi mittasi yliajopaikalta 60 metrin jarrutusjäljet. Suorite-tussa kokeessa samanlaisilla renkailla varustettu samanlainen auto pysähtyi samalla tiellä no-peudesta 50 km/h 28 metrin matkalla. Millä no-peudella kolariauton voidaan arvioida liikku-neen?

321. Valaistus on kääntäen verrannollinen va-lonlähteen etäisyyden neliöön. Valaistus $4,3$ metrin etäisyydellä lampusta on 60 luksia. Lu-kemiseen ja kirjoittamiseen suositeltava valais-tus on vähintään 400 luksia. Kuinka lähellä lampua valaistus on suosituksen mukainen?

322. Pankkitilille talletettiin 4 000 euroa. Tili tyhjennettiin tasan kaksi vuotta myöhemmin, jolloin tilillä oli 4 368,10 euroa. Mikä oli tilin (vuotuinen) korkoprosentti? (Ohje: Pääoma tulee molempina vuosina kerro-tuksi samalla luvulla.)

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

323. Ratkaise yhtälö.

- a) $x^2 = 5$ b) $3x^2 = 75$
 c) $36x^2 = 12$

324. Ratkaise yhtälö.

- a) $-9x^2 = 0$ b) $3x^2 = 54$
 c) $\frac{1}{2}x^2 = \frac{2}{3}$

325. Tapani haluaa rajata 700 neliömetrin suu-ruisen ympyräalueen. Kuinka pitkä naru tarvi-taan ympyrän säteeksi?

326. a) Taulukoi funktion $\frac{1}{4}x^2$ arvoja muuttu-

jan x arvoilla -4 :stä 4 :ään ykkösen välein ja piirrä funktion kuvaaja.

b) Määritä kuvaajasta yhden desimaalin tark-kuudella yhtälön $\frac{1}{4}x^2 = 3$ juuret.

327. Painoindeksi on yleisesti käytetty yli- ja alipainaisuuden mittari. Painoindeksi lasketaan jakamalla paino (kilogrammoina) pituuden (metreinä) neliöllä. Ylipainaisuuden raja on painoindeksin arvo 25.

- a) Kuinka paljon kaksimetrisen henkilö saa tämän mukaan painaa?
- b) Kuinka pitkän henkilön ylipainaisuuden raja on 60 kg?

328. Auringon massa on $1,99 \cdot 10^{33}$ g ja vetyatomien massa $1,67 \cdot 10^{-24}$ g. Tiinan massan suhde vetyatomien massa on yhtä suuri kuin auringon massan suhde Tiinan massa. Kuinka paljon Tiina painaa?

329. Lentokoneen saavutettua matkakorkeuden Kari punnitsi itsensä jousivaa'alla ja vaaka näytti 84,8 kg. Merenpinnan tasolla ennen koneen lähtöä sama vaaka oli näyttänyt 85,1 kg. Kuinka korkealla lentokone lentää? Painovoima on kääntäen verrannollinen maan keskipisteestä mitatun etäisyyden neliöön. Maapallon säde on 6 370 km.

330. Planeetan vuosi on aika, joka planeetalta kuluu yhteen kierrokseen Auringon ympäri. Keplerin lain mukaan planeetan vuoden neliö on suoraan verrannollinen planeetan Auringosta mitatun etäisyyden kuutioon. Maan keskietäisyys Auringosta on $1,50 \cdot 10^8$ km ja Saturnuksen $1,43 \cdot 10^9$ km. Kuinka monta Maan vuotta on yksi Saturnuksen vuosi?

331. Autoilija havaitsi tiellä poikittain olevan pimeän perävaunun ja sai hätäjarrutuksella auton pysähtymään juuri ennen sitä. Jarrutuksen alkaessa nopeus oli 80 km/h. Millä nopeudella hän olisi törmännyt perävaunuun, jos hänen nopeutensa jarrutuksen alkaessa olisi ollut
a) 100 km/h b) 120 km/h ja jarrutus olisi alkanut samalla kohdalla? Jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön.

Potenssifunktiot ja korkeammat juuret

- Ongelma 1** Mikä on kuution tilavuus, jos kuution särmän pituus on a) 5 cm
b) x cm?
- Ongelma 2** Kuinka moninkertaiseksi valtion väkiluku kasvaa 10 vuodessa, jos väkiluku tänä aikana joka vuosi kasvaa a) 1,013-kertaiseksi (Argentiina) b) x -kertaiseksi?
- Ongelma 3** Piirrä samaan graafisen laskimen näyttöön
a) funktioiden x^3 , x^5 ja x^7 kuvaajat
b) funktioiden x^2 , x^4 ja x^6 kuvaajat.

Potenssifunktio

Funktiot x , x^2 , x^3 jne., joiden arvo on muuttujan x arvon potenssi, ovat *potenssifunktioita*.

JOHDANTOESIMERKKI 1

Ratkaise funktion x^3 kuvaajan avulla yhtälö a) $x^3 = 5$ b) $x^3 = -4$.

Ratkaisu

Kuvaajan voi piirtää graafisen laskimen avulla tai laskemalla joitakin funktion x^3 arvoja. Kuvaaja kulkee muun muassa pisteiden $(2, 8)$, $(1, 1)$, $(0, 0)$, $(-1, -1)$ ja $(-2, -8)$ kautta. Kuvaajan tarkempi piirtäminen on tehtävänä 332.

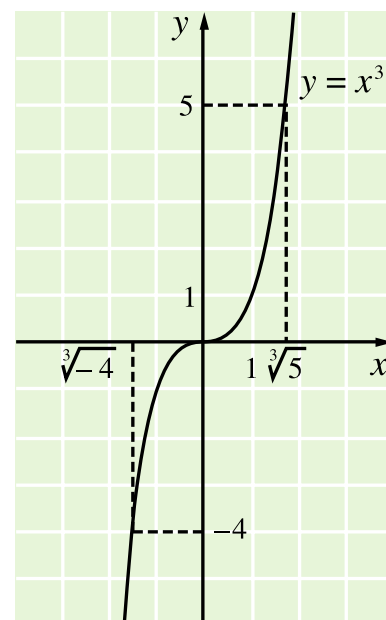
Funktion x^3 kuvaaja on symmetrinen origon suhteen, sillä kun luku vaihdetaan vastaluvuksi, myös pariton potenssi vaihtuu vastaluvuksi.

a) On olemassa yksi luku, jonka kolmas potenssi on 5. Luku on noin 1,7. Lukua sanotaan luvun 5 kolmanneksi juureksi eli kuutiojuureksi ja sitä merkitään $\sqrt[3]{5}$.

Siis yhtälö $x^3 = 5$ toteutuu, kun $x = \sqrt[3]{5} \approx 1,7$.

b) On olemassa yksi luku, jonka kolmas potenssi on -4 . Luku on noin $-1,6$. Siis luvun -4 kuutiojuuri on $\sqrt[3]{-4} \approx -1,6$.

Yhtälö $x^3 = -4$ toteutuu, kun $x = \sqrt[3]{-4} \approx -1,6$.



Vastaus

a) $x = \sqrt[3]{5} \approx 1,7$ b) $x = \sqrt[3]{-4} \approx -1,6$

JOHDANTOESIMERKKI 2

Ratkaise funktion x^4 kuvaajan avulla yhtälö a) $x^4 = 5$ b) $x^4 = -3$.

Ratkaisu

Kuvaaja kulkee muun muassa pisteiden $(2, 16)$, $(1, 1)$, $(0, 0)$, $(-1, 1)$ ja $(-2, 16)$ kautta. Kuvaajan tarkempi piirtäminen on tehtävänä 346.

Funktion x^4 kuvaaja on symmetrinen y -akselin suhteen, sillä luvun ja sen vastaluvun parilliset potenssit ovat yhtä suuret.

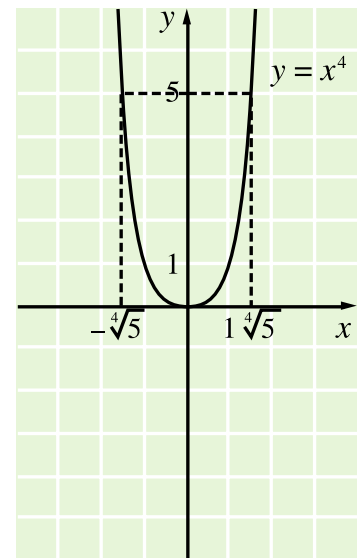
a) On olemassa kaksi lukua, joiden neljäs potenssi on 5. Luvut ovat toistensa vastalukuja, likimain 1,5 ja -1,5.

Positiivista lukua, jonka neljäs potenssi on 5, sanotaan luvun 5 neljänneksi juureksi ja sitä merkitään $\sqrt[4]{5}$.

Negatiivinen luku, jonka neljäs potenssi on 5, on luvun 5 neljänneksen juuren vastaluku $-\sqrt[4]{5}$.

Siis yhtälö $x^4 = 5$ toteutuu, kun

$$x = \sqrt[4]{5} \approx 1,5 \text{ tai } x = -\sqrt[4]{5} \approx -1,5$$



b) Yhtälöllä $x^4 = -3$ ei ole juuria, sillä potenssifunktio, jonka eksponentti on parillinen, ei saa negatiivisia arvoja.

Vastaus

a) $x = \sqrt[4]{5} \approx 1,5$ tai $x = -\sqrt[4]{5} \approx -1,5$ b) Ei juuria.

Luvun a n . juuri $\sqrt[n]{a}$

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Juuri $\sqrt[n]{a}$ on luku, jolle pätee $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Juuren $\sqrt[n]{a}$ tarkempi määritelmä riippuu siitä, onko *juuren kertaluku* n parillinen vai pariton. Eroavuudet juontuvat potenssin merkkisäännöstä: negatiivisen luvun ja sen positiivisen vastaluvun parilliset potenssit ovat yhtä suuria positiivisia lukuja, ja negatiivisen luvun pariton potenssi on negatiivinen.

Kun n on parillinen, vain epänegatiiviset luvut ovat jonkin luvun n . potensseja. Kahdesta luvusta, joiden n . potenssi on a , epänegatiivista lukua kutsutaan luvun a n . juureksi.

Juuren $\sqrt[n]{a}$ määritelmä ja määrittelyehto, kun n on parillinen

Luvun a n . juuri $\sqrt[n]{a}$ on epänegatiivinen luku, jonka n . potenssi on a . $\sqrt[n]{a}$ on määritelty, kun $a \geq 0$.

Kun n on pariton, kaikki luvut ovat jonkin luvun n . potensseja. Jokainen luku on vain yhden luvun n . potenssi.

Juuren $\sqrt[n]{a}$ määritelmä ja määrittelyehto, kun n on pariton

Luvun a n . juuri $\sqrt[n]{a}$ on luku, jonka n . potenssi on a . $\sqrt[n]{a}$ on määritelty kaikilla a :n arvoilla.

Luvun a toiselle juurelle $\sqrt[2]{a}$ on jo aiemmin annettu lyhyempi nimitys neliöjuuri ja yksinkertaisempi merkintä $\sqrt{a}$.

Myös luvun a kolmannella juurella $\sqrt[3]{a}$ on oma nimitys. Kolmatta juurta sanotaan *kuutiojuureksi*.

ESIMERKKI 3

Merkitse ja määritä

- a) luvun 4096 kuudes juuri b) luvun -64 kuudes juuri
c) luvun 100 viides juuri d) luvun -7776 viides juuri.

Ratkaisu

a) Luvun 4096 kuudes juuri merkitään $\sqrt[6]{4096}$. Juuren arvo lasketaan laskimella (näppäin $\sqrt[n]{y}$ tai vastaava).

$$\sqrt[6]{4096} = 4 \quad \text{Tulos tarkoittaa, että } 4096 = 4^6.$$

b) Koska luku -64 on negatiivinen, kuudes juuri $\sqrt[6]{-64}$ ei ole määritelty.

c) Luvun 100 viides juuri merkitään $\sqrt[5]{100}$. Laskimella saadaan $\sqrt[5]{100} \approx 2,51$.

Juuren tarkka arvo on $\sqrt[5]{100}$ ja kaksidesimaalinen likiarvo 2,51.

d) Merkitään juuri ja lasketaan laskimella.

$$\sqrt[5]{-7776} = -6 \quad \text{Tulos tarkoittaa, että } -7776 = (-6)^5.$$

Vastaus

- a) 4 b) Ei määritelty. c) $\sqrt[5]{100} \approx 2,51$ d) -6

Potenssiyhtälön $x^n = a$ ratkaiseminen

Kun n on parillinen, yhtälön $x^n = a$ juurten lukumäärä riippuu luvun a merkistä samalla tavalla kuin neliöyhtälön $x^2 = a$ juurten lukumäärä. Kun n on pariton, yhtälöllä $x^n = a$ on a :n arvosta riippumatta aina yksi juuri.

 n parillinen

Jos $a \geq 0$, niin

$$x^n = a, \text{ kun } x = \sqrt[n]{a} \text{ tai } x = -\sqrt[n]{a}. \quad \text{Luvun } a \text{ } n. \text{ juuri ja sen vastaluku}$$

Jos $a < 0$, yhtälöllä $x^n = a$ ei ole ratkaisua.

 n pariton

$$x^n = a, \text{ kun } x = \sqrt[n]{a} \quad \text{Luvun } a \text{ } n. \text{ juuri}$$

ESIMERKKI 4

Ratkaise yhtälö a) $8x^{12} = 40$ b) $5x^3 + 1715 = 0$.

Ratkaisu

a) $8x^{12} = 40 \quad | : 8$ Ratkaistaan ensin x^{12} .

$$x^{12} = 5$$

Yhtälön ratkaisut ovat luvun 5 kahdestoista juuri ja sen vastaluku.

$$x = \sqrt[12]{5} \text{ tai } x = -\sqrt[12]{5}$$

Yhtälön juurien tarkat arvot.

$$x \approx 1,144 \text{ tai } x \approx -1,144$$

Juurien kolmedesimaaliset likiarvot.

b) $5x^3 + 1715 = 0$

Ratkaistaan ensin x^3 .

$$5x^3 = -1715 \quad | : 5$$

$$x^3 = -343$$

Yhtälön ainoa ratkaisu on luvun -343 kuutiojuuri.

$$x = \sqrt[3]{-343} = -7$$

Vastaus

a) $x = \sqrt[12]{5} \approx 1,144$ tai $x = -\sqrt[12]{5} \approx -1,144$ b) $x = -7$

ESIMERKKI 5

Pankkitilille talletetaan 25 000 euroa kahdeksaksi vuodeksi. Oletetaan, että tilin vuotuinen korko on koko ajan sama. Kuinka suuri koron tulisi olla, jotta tämän ajan kuluttua tilillä olisi 40 000 euroa?

Ratkaisu

Kun korko vuosittain lisätään pääomaan, talletuksen arvo tulee aina kerrotuksi samalla kertoimella k . Kun on kulunut kahdeksan vuotta, talletuksen arvo on $k^8 \cdot 25\,000$ euroa.

Tilillä on tällöin oltava 40 000 euroa.

$$k^8 \cdot 25\,000 = 40\,000 \quad | : 25\,000$$

$$k^8 = 1,6$$

$$k = \sqrt[8]{1,6} \approx 1,0605 \quad \text{tai} \quad k = -\sqrt[8]{1,6} \approx -1,0605$$

Yhtälöllä on kaksi ratkaisua. Vain positiivinen ratkaisu voidaan tulkita korkokertoimeksi.

Talletuksen on tultava joka vuosi 1,0605-kertaiseksi. Koron olisi oltava 6,05 %.

Vastaus

6,05 %

ESIMERKKI 6

Radioaktiiviselle aineelle on ominaista, että aine hajoaa eli muuttuu muiksi aineiksi. Samanmittaisessa ajanjaksossa aineen määrä pienenee aina yhtä monta prosenttia.

Hajoamisnopeus ilmaistaan usein *puoliintumisaikana*. Puoliintumisaika on aika, jossa puolet aineesta muuttuu muiksi aineiksi. Strontiumin isotoopin 90 puoliintumisaika on 29 vuotta.

- Kuinka monta prosenttia aineesta hajoaa vuodessa?
- Kuinka paljon on jäljellä 2,4 kg:sta strontium 90:ää 53 vuoden kuluttua?

Ratkaisu

- Olkoon massan suuruus alussa a . Aineesta hajoaa joka vuosi yhtä monta prosenttia, eli massa tulee joka vuosi kerrotuksi samalla luvulla k . Kun on kulunut 29 vuotta, massa on $k^{29} \cdot a$.

Aineesta on 29 vuoden kuluttua jäljellä puolet eli $0,5a$.

$$k^{29} \cdot a = 0,5a \quad | : a \quad a \text{ voidaan heti jakaa pois.}$$

$$k^{29} = 0,5$$

$$k = \sqrt[29]{0,5} \approx 0,97638$$

Aineen massa tulee joka vuosi 0,97638-kertaiseksi. Vuodessa aineesta hajoaa $100 \% - 97,638 \% \approx 2,4 \%$.*

- Aineen massa tulee joka vuosi 0,97638-kertaiseksi. Jos massa nyt on 2,4 kg, niin 53 vuoden kuluttua massa on $0,97638^{53} \cdot 2,4 \text{ kg} \approx 0,68 \text{ kg}$.

Vastaus

- 2,4 %
- 0,68 kg

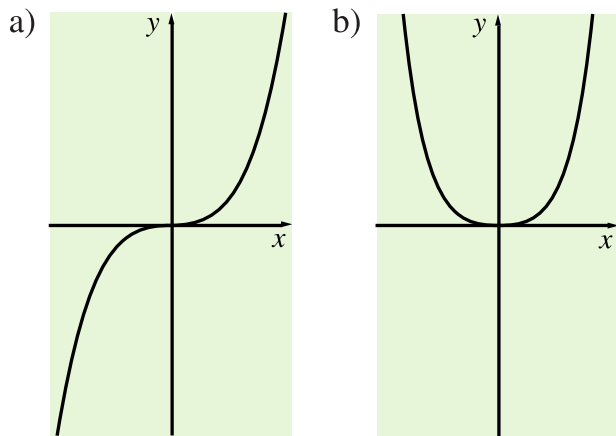
* a-kohdan vastaus pyöristettiin lähtötiedon (29 vuotta) mukaiseen kahden numeron tarkkuuteen. Kertoimelle k laskettiin tarkempi likiarvo b-kohtaa varten.

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

332. Laske funktion x^3 arvoja muuttujan arvoilla -2 :sta 2 :een $0,5$:n välein ja piirrä funktion x^3 kuvaaja.

333. Kummassakin kuviossa a) ja b) on erään potenssifunktion x^n kuvaaja. Onko eksponentti n parillinen vai pariton?



334. Määritä juuren arvo (tarkka arvo ja likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella).

- a) luvun $2\,187$ seitsemäs juuri
- b) luvun -600 seitsemäs juuri
- c) luvun 5 kahdeksas juuri
- d) luvun 0 kahdeksas juuri
- e) luvun -16 kahdeksas juuri.

335. Nisäkkään verenkiertoaika eli aika, jonka kuluttua sydäimestä lähtenyt veri palaa sydämeen, on likimain suoraan verrannollinen eläimen massan neljänteen juureen. 70 kg painavan ihmisen verenkiertoaika on noin 50 sekuntia. Mikä on $5\,200\text{ kg}$ painavan norsun verenkiertoaika?

336. a) Määritä luvun $6\,561$ kahdeksas juuri. Ratkaise yhtälö $x^8 = 6561$.

b) Määritä luvun $7\,776$ viides juuri. Ratkaise yhtälö $x^5 = 7776$.

337. Ratkaise yhtälö (tarkat arvot ja likiarvot kolmen numeron tarkkuudella).

- a) $x^4 = 2401$ b) $3x^5 = 63$
- c) $6x^7 = -30$ d) $7x^6 = 14$

338. On valmistettava kuution muotoinen kahden litran mitta-astia (ns. pieni kappa). Määritä astian mitat.

339. Tuulivoimalasta saatava teho on suoraan verrannollinen tuulen nopeuden kuutioon. Kun tuulen nopeus oli $2,6\text{ m/s}$, pienen mökkivoimalan teho piti juuri ja juuri kirkkaana yhden 75 watin sähkölampun. Kuinka kovaa pitäisi tuulla, jotta voimalasta saataisiin sähkökiukaan vaatima $5\,000$ watin teho?

340. Pääoma kasvoi kuudessa vuodessa $4\,500$ eurosta $6\,000$ euroon. Vuotuinen korkoprosentti pysyi koko ajan samana. Kuinka suuri korko oli?

341. Maapallon väkiluku ylitti 5 miljardia vuonna 1987 ja 6 miljardia vuonna 1999 .

- a) Mikä oli vuotuinen väestönkasvuprosentti?
- b) Mikä on maapallon väkiluku vuonna 2020 , jos kasvu jatkuu samanlaisena?

342. Kuinka suuri tulee vuotuisen koron olla, jotta sijoitettu pääoma kaksinkertaistuisi kymmenessä vuodessa?

343. Radonin isotoopin 225 puoliintumisaika on 15 vuorokautta. Kuinka monta prosenttia ai-
neesta hajoaa

- a) yhdessä vuorokaudessa
- b) kolmessa viikossa?

344. Palkkoja suunnitellaan korotettavan joka vuosi yhtä monta prosenttia niin, että viidessä vuodessa palkat nousevat 30 %. Mikä on vuo-
tuinen palkankorotusprosentti?

345. Teollisuuden rikkipäästöjä halutaan kym-
menessä vuodessa vähentää 90 %. Mikä tulee
asettaa vuotuiseksi vähentämistavoitteeksi?

SARJA II.

PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

346. Laske funktion x^4 arvoja muuttujan ar-
voilla $-1,5$:sta $1,5$:een $0,5$:n välein ja piirrä
funktion x^4 kuvaaja.

347. Merkitse ja laske.

- a) luvun 81 neljäs juuri
- b) luvun 81 neljännen juuren vastaluku
- c) luvun 125 kuutiojuuri
- d) luvun -125 kuutiojuuri

348. Erään matemaattisen mallin mukaan eko-
logisen alueen (metsän, saaren, järven tms.) laji-
määrä on suoraan verrannollinen alueen koon
neljänteen juureen. Oletetaan, että 1 200 hehta-
arin suuruinen kaupungin ympäröimä metsä hävi-
tetään teiden ja rakennusten alle niin, että jäljelle
jää 300 hehtaaria. Kuinka monta prosenttia met-
sässä elävien lajien määrä vähenee?

349. Ratkaise yhtälö (tarkat arvot ja likiarvot
kolmen numeron tarkkuudella).

- a) $x^6 = 3$
- b) $6x^4 = 1$
- c) $\frac{1}{5}x^7 = 1$
- d) $5x^8 = -20$
- e) $4x^5 = -32$

350. Ratkaise yhtälö.

- a) $3x^6 - 12\,288 = 0$
- b) $4x^7 - 312\,500 = 0$

351. Suomen järvien yhteispinta-ala on
 $32\,000\text{ km}^2$ ja keskisyvyys $4,3\text{ m}$. Kuinka suu-
ren jääkuution saisi Suomen järvien vedestä?
Jäätymisen aiheuttamaa tilavuuden kasvua ei
tarvitse ottaa huomioon.

352. Kuinka suuri on pallon muotoisen 400 lit-
ran vesisäiliön halkaisija?

(Pallon tilavuus on $\frac{4\pi r^3}{3}$, missä r on pallon sä-
de.)

353. Aurinkokunnastamme on löydetty kym-
meniätuhansia Aurinkoa kiertäviä pikkuplaneet-
toja eli asteroideja. Havaitun planeetan etäisyys
Auringosta voidaan laskea määrittämällä aika,
jossa planeetta kiertää Auringon ympäri, sillä
Keplerin lain mukaan kiertoajan neliö on suo-
raan verrannollinen planeetan Auringosta mita-
tun etäisyyden kuutioon. Pikkuplaneetta Marja-
leena (yksi 214:stä suomalaisnimisestä pikku-
planeetasta) kiertää auringon $5,22$:ssa Maan
vuodessa. Mikä on Marjaleenan etäisyys Aurin-
gosta? Maan keskietäisyys Auringosta on
 $1,50 \cdot 10^8\text{ km}$.

354. Kuuden peräkkäisen kopiokoneella tehdyn pienennöksen jälkeen kuvion mitat olivat tulleet 0,12-kertaisiksi. Kuinka kuvion mitoille käy yhdessä kopioinnissa?

355. Kaupungin asukasluku vuonna 1994 oli 12 200 ja kymmenen vuotta myöhemmin 15 300. Väestönkasvu oli tasaista, eli vuotuinen kasvuprosentti säilyi koko ajanjakson aikana.

- Kuinka monta prosenttia asukasluku kasvoi vuosittain?
- Mikä on väkiluku vuonna 2020, jos kasvu jatkuu samanlaisena?

356. Liikenneonnettomuuksien lukumäärää halutaan vähentää viidessä vuodessa 30 %. Mikä tulee asettaa vuotuiseksi vähentämistavoitteeksi?

357. Nykyisellä kasvuvauhdilla Mauritanian väestö kaksinkertaistuu 23 vuodessa. Jos kasvuvauhti jatkuu samanlaisena, niin kuinka moninkertaiseksi väkiluku kasvaa sadassa vuodessa?

358. a) Ote lehtiartikkelista: ”Teollisuuden työntekijöiden palkat nousivat 1980-luvulla 140 %. Keskimäärin siis 9,1 % vuodessa.” Kuinka luku 9,1 % on laskettu? Perustele sanan *keskimäärin* käyttö.

b) Samalla vuosikymmenellä elinkustannukset (elinkustannusindeksillä mitattuna) kasvoivat 92 %. Kuinka suuri elinkustannusten keskimääräinen vuotuinen kasvu oli?

359. Viitenä peräkkäisenä vuotena hinnat nousivat 9,1 %, 10,6 %, 6,4 %, 3,7 % ja 1,2 %. Kuinka suuri oli ajanjakson keskimääräinen vuotuinen inflaatioprosentti (katso edellinen tehtävä)?

360. Positiivisten lukujen $a_1, a_2, \dots, a_n$ geometrinen keskiarvo eli keskiverto on

$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$. Lukujen geometrinen keskiarvo on siis lukujen tulon n . juuri, kun lukujen lukumäärä on n .

a) Laske lukujen 2, 3, 4 ja 5 geometrinen keskiarvo. Vertaa geometrsta keskiarvoa lukujen tavalliseen (ns. aritmeettiseen) keskiarvoon.

b) Määritä verrantoyhtälön $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ positiivinen juuri, kun $a > 0$ ja $b > 0$. Ilmaise tulos sanallisesti.

361. Aineenvaihdunnan takia kaikki eliöt (kasvit ja eläimet) sisältävät samassa suhteessa hiilen eri isotooppeja kuin ilmakehä. Eliön kuoltua radioaktiivisen isotoopin, hiili 14:n, määrä alkaa radioaktiivisen hajoamisen seurauksena vähetä. Hiili 14:n puoliintumisaika on 5 568 vuotta.

a) Kuinka monta prosenttia hiili 14:ää on jäljellä 16 000 vuotta sitten eläneen mammutin luissa?

b) Hiili 14 -pitoisuutta käytetään historiallisten löytöjen ajoitukseen eli ns. radiohiiliajoitukseen. Egyptiläisestä pyramidista löydettyssä muumiossa oli vuonna 1975 jäljellä 65 % hiili 14:ää. Selvitä kokeilemalla, miltä ajalta muumio oli peräisin.

Eksponenttifunktio

JOHDANTOESIMERKKI 1

Suotuisissa oloissa erään bakteeriviljelmän massa kasvaa joka tunti 1,7-kertaiseksi. Tällä hetkellä massa on 3,1 g.

- Kuinka suuri viljelmän massa on neljän tunnin kuluttua?
- Kuinka suuri massa oli kolme tuntia sitten?
- Muodosta funktio, joka ilmaisee, kuinka suuri massa on x tunnin kuluttua. Laske funktion avulla massa puolen tunnin kuluttua ja 1,5 tuntia sitten. Hahmottele funktion kuvaaja.

Ratkaisu

- a) Neljässä tunnissa massa kasvaa $1,7^4$ -kertaiseksi:

$$1,7^4 \cdot 3,1 \approx 26 \text{ (g)}.$$

- b) Kolmen tunnin takainen massa on nykyhetkeen tultaessa kasvanut $1,7^3$ -kertaiseksi. Sen suuruus saadaan ratkaisemalla m yhtälöstä $1,7^3 m = 3,1$. Kolmen tunnin takainen massa on siis tämänhetkinen massa 3,1 g jaettuna kasvukertoimen potenssilla $1,7^3$:

$$\frac{3,1}{1,7^3} \approx 0,63 \text{ (g)}$$

eli kerrottuna kasvukertoimen potenssilla $1,7^{-3}$:

$$\frac{3,1}{1,7^3} = \frac{1}{1,7^3} \cdot 3,1 = 1,7^{-3} \cdot 3,1 \approx 0,63 \text{ (g)}.$$

- c) Kasvuston massan x tunnin kuluttua ilmaisee funktio $1,7^x \cdot 3,1$.

Aikamuuttujan x tulevaisuuteen viittaava arvo on positiivinen ja menneisyyteen viittaava arvo negatiivinen.

Funktion lausekkeeseen voidaan sijoittaa mikä tahansa muuttujan x arvo.

Massa puolen eli 0,5 tunnin kuluttua on

$$1,7^{0,5} \cdot 3,1 \approx 4,0 \text{ (g)}.$$

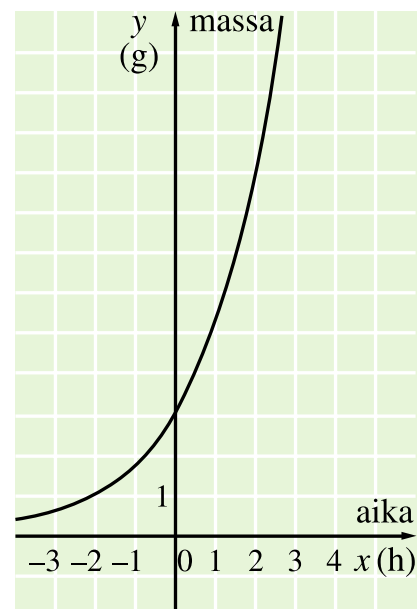
Potenssin arvo lasketaan laskimella.

Massa 1,5 tuntia sitten oli

$$1,7^{-1,5} \cdot 3,1 \approx 1,4 \text{ (g)}.$$

Kuvaajan piirtämiseksi kootaan edellä lasketut funktion arvot ja lasketaan muutama arvo lisää.

x	$y = 1,7^x \cdot 3,1$	(x, y)
-3	$1,7^{-3} \cdot 3,1 \approx 0,63$	$(-3; 0,63)$
-1,5	$1,7^{-1,5} \cdot 3,1 \approx 1,4$	$(-1,5; 1,4)$
-1	$1,7^{-1} \cdot 3,1 \approx 1,8$	$(-1; 1,8)$
0	$1,7^0 \cdot 3,1 = 3,1$	$(0; 3,1)$
0,5	$1,7^{0,5} \cdot 3,1 \approx 4,0$	$(0,5; 4,0)$
1	$1,7^1 \cdot 3,1 \approx 5,3$	$(1; 5,3)$
2	$1,7^2 \cdot 3,1 \approx 9,0$	$(2; 9,0)$
4	$1,7^4 \cdot 3,1 \approx 26$	$(4; 26)$



Vastaus

- a) 26 g b) 0,63 g c) funktio $1,7^x \cdot 3,1$;
puolen tunnin kuluttua 4,0 g ja 1,5 tuntia sitten 1,4 g

Jos kantaluku k on positiivinen, niin potenssissa k^x eksponentin ei tarvitse olla kokonaisluku. Potenssin k^x arvo voidaan laskea laskimella kaikilla muuttujan x arvoilla.

Eksponenttifunktio

Funktio k^x , jossa muuttuja on eksponenttina, on *eksponenttifunktio*.

Eksponenttifunktion kantaluvun k tulee olla positiivinen ($k > 0$).

Eksponentiaalinen muutos

Jos suureen muutosta kuvaa eksponenttifunktio, niin usein sanotaan, että suure *muuttuu eksponentiaalisesti*.

Edellisessä esimerkissä 1 nähtiin, että suotuisissa oloissa bakteerikannan massa kasvaa eksponentiaalisesti. Esimerkissä 3 on eksponentiaalisesti vähenevä suure.

ESIMERKKI 2

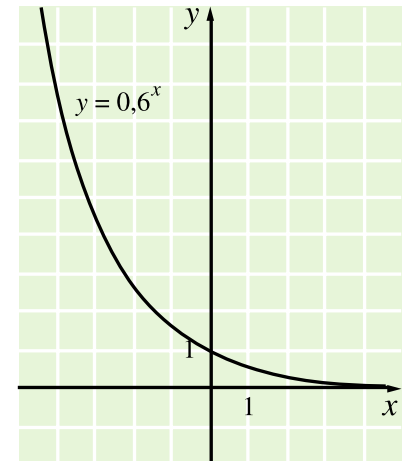
Piirrä eksponenttifunktion a) $0,6^x$ b) $1,4^x$ kuvaaja.

Ratkaisu

Kuvaajat voidaan piirtää graafisella laskimella tai niin, että määritetään joitakin kuvaajan pisteitä laskemalla funktion arvojen likiarvoja.

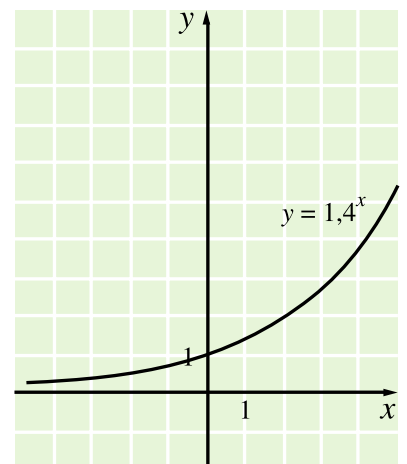
a)

x	$y = 0,6^x$
-3	4,63
-2	2,78
-1	1,67
0	1
1	0,6
2	0,36
3	0,22



b)

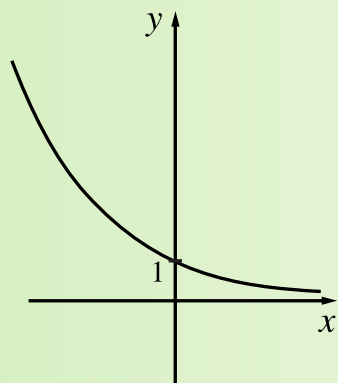
x	$y = 1,4^x$
-3	0,36
-2	0,51
-1	0,71
0	1
1	1,4
2	1,96
3	2,74



Eksponenttifunktion k^x kuvaaja

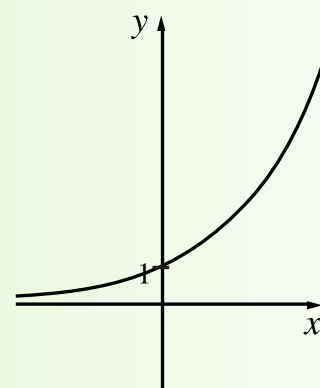
Kaikkien eksponenttifunktioiden k^x kuvaajat kulkevat pisteen $(0, 1)$ kautta, sillä $k^0 = 1$.

Eksponenttifunktion kaikki arvot ovat positiivisia, joten kuvaajat ovat kokonaan x -akselin yläpuolella.



$$0 < k < 1$$

Eksponentiaalinen väheneminen



$$k > 1$$

Eksponentiaalinen kasvu

Jos eksponenttifunktion k^x kantaluku k on nollan ja yhden välissä ($0 < k < 1$), niin eksponentin x suuretessa funktion k^x arvot pienenevät.

Jos kantaluku k on suurempi kuin yksi ($k > 1$), niin eksponentin x suuretessa funktion arvot suurenevat.

ESIMERKKI 3

Fluorin radioaktiivista isotooppia fluori 18 käytetään lääketieteessä varjoaineena aivosairauksien tutkimiseen. Aineesta hajoaa 32 % tunnissa. Potilaalle annetaan 3,6 milligramman annos.

- Muodosta funktio, joka ilmaisee elimistössä olevan fluori 18:n määrän x tunnin kuluttua antamishetkestä.
- Kuinka paljon ainetta on jäljellä 2,5 tunnin kuluttua antamishetkestä?
- Annos valmistetaan puoli tuntia ennen sen antamista potilaalle. Kuinka suureksi annos pitää tehdä?

Ratkaisu

- a) Aineen määrä pienenee joka tunti 32 % eli aineen määrä pienenee joka tunti $100 \% - 32 \% = 68 \%$:iin määrästä tunnin alussa.

Aineen massa tulee joka tunti 0,68-kertaiseksi.

Kun lääkkeen antamishetkestä on kulunut x tuntia, massa on $0,68^x \cdot 3,6$ (mg).

- b) Aineen määrä 2,5 tunnin kuluttua on $0,68^{2,5} \cdot 3,6 \approx 1,4$ (mg).

- c) Hetkeä ”puoli tuntia ennen antamishetkeä” vastaa muuttujan arvo $x = -0,5$. Valmistettavan annoksen suuruuden tulee olla $0,68^{-0,5} \cdot 3,6 \approx 4,4$ (mg).

Vastaus

- a) $0,68^x \cdot 3,6$ (mg) b) 1,4 mg c) 4,4 mg

ESIMERKKI 4

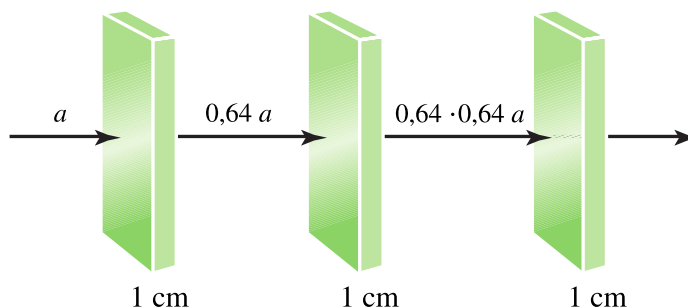
Heijastamaton muovilevy, jonka paksuus on 1,0 cm, päästää lävitseen 64 % levyyn tulevasta valosta. Kuinka monta prosenttia valosta läpäisee samasta aineesta tehdyn levyn, jonka paksuus on

- a) 4,0 cm b) 2,4 cm c) 0,32 cm?

Ratkaisu

- a) Merkitään levyyn tulevan valon määrää a .

Senttimetrin paksuisen kerroksen läpäisee 64 % siihen tulevan valon määrästä. Siis jokainen senttimetrin paksuinen kerros levyä 0,64-kertaistaa siihen tulevan valon määrän.



Kun valo on läpäissyt 4,0 senttimetrin paksuisen levyn, valon määrä on tullut $0,64^4$ -kertaiseksi.

$$0,64^4 \cdot a \approx 0,17a$$

Valosta on jäljellä 17 %.

- b) Kun valo on läpäissyt x senttimetrin paksuisen levyn, valon määrä on tullut $0,64^x$ -kertaiseksi. Valon määrä on $0,64^x \cdot a$.

Kun $x = 2,4$, valon määrä on

$$0,64^{2,4} \cdot a \approx 0,34a.$$

Valosta on jäljellä 34 %.

- c) Kun $x = 0,32$, valon määrä on

$$0,64^{0,32} \cdot a \approx 0,87a.$$

Valosta on jäljellä 87 %.

Vastaus

- a) 17 % b) 34 % c) 87 %

Tässä luvussa on laskettu laskimella positiivisen kantaluvun k potensseja k^x , kun eksponentti x on mikä tahansa rationaaliluku. Esimerkiksi $5^{1,7} \approx 15,4$ ja $5^{-\frac{2}{3}} \approx 0,342$.

Näiden potenssien avulla on tutkittu suureiden muuttumista. Emme kuitenkaan vielä tiedä, mitä nämä potenssit itse asiassa tarkoittavat.

Kun eksponentti on kokonaisluku, niin potenssi on tulo (esimerkiksi $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$) tai tulon käänteisluku (esimerkiksi $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$). Mutta:

Mitä tarkoittaa potenssi, jonka eksponentti ei ole kokonaisluku?

Tähän kysymykseen vastataan seuraavassa luvussa.

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

362. Laske laskimella.

a) $7^{-0,89}$ b) $8^{\frac{2}{3}}$ c) $8^{-\frac{1}{3}}$

363. Jos jauhelihaa pidetään huoneenlämmössä, lihassa olevien bakteerien lukumäärä 7,9-kertaistuu joka tunti. Bakteerien lukumäärä keittön pöydälle unohtuneessa jauhelihakilossa on nyt 7 500. Muodosta funktio, joka ilmaisee bakteerien lukumäärän x tunnin kuluttua. Laske bakteerien määrä

- a) 3,5 tunnin kuluttua
b) 2,5 tuntia sitten.

364. a) Piirrä funktion 2^x kuvaaja. Kun muuttujan x arvot suurenevat, niin kuinka muuttuvat funktion 2^x arvot?

b) Piirrä funktion $0,5^x$ kuvaaja. Kun muuttujan x arvot suurenevat, niin kuinka muuttuvat funktion $0,5^x$ arvot?

365. Tutki eksponenttifunktiota 1^x . Mitä arvoja funktio saa? Millainen on funktion kuvaaja?

366. Radioaktiivisen isotoopin cesium 137 määrä vähenee radioaktiivisen hajoamisen seurauksena 2,3 % vuodessa. Ydinjätevarastossa on nyt 3,28 kg ainetta.

- a) Muodosta funktio, joka ilmaisee isotoopin määrän x vuoden kuluttua.
b) Kuinka paljon isotooppia on jäljellä 15 vuoden kuluttua?
c) Isotooppierä tuotiin varastoon 1,5 vuotta sitten. Mikä erän suuruus silloin oli?

367. Suodatin, jonka paksuus on 1,0 cm, päästää lävitseen 25 % tiettyä kokoa suuremmista ilman pölyhiukkasista. Tällaisten hiukkasten lukumäärä kuutiometrissä puhdistamatonta ilmaa on 25 000. Kuinka paljon pölyhiukkasia jää kuutiometriin ilmaa, kun ilma puhdistetaan samasta aineesta tehdyllä suodattimella, jonka paksuus on

- a) 3,5 cm b) 3,0 mm?

368. Eräästä radioaktiivisesta aineesta hajoaa tunnissa 47 %. Aineen määrä on nyt 85 g. Paljonko ainetta

- a) on 45 minuutin kuluttua
b) oli 45 minuuttia sitten?

369. Erään lääkeaineen määrä elimistössä puolittuu viidessä tunnissa. Kuinka monta prosenttia määrä pienenee

- a) yhdessä tunnissa b) 3,5 tunnissa?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

370. Menestyvä yritys on vuosittain 1,3-kertaistanut myyntinsä. Myynnin arvo on nyt 45 miljoonaa euroa.

- a) Mikä on myynnin arvo kolmen vuoden päästä, jos kasvu jatkuu samanlaisena?
b) Mikä oli myynnin arvo neljä ja kuusi vuotta sitten?

371. Bakteeriviljelmän massa kasvaa eksponentiaalisesti niin, että massa 3,0-kertaistuu vuorokaudessa. Massa on nyt 250 g. Muodosta funktio, joka ilmaisee viljelmän massan x vuorokauden kuluttua. Laske massa

- a) 3,5 vuorokauden kuluttua
b) 2,5 vuorokautta sitten
c) kymmenen tunnin kuluttua
d) kahdeksan tuntia sitten.

372. Piirrä samaan koordinaatistoon eksponenttifunktion 3^x ja potenssifunktion x^3 kuvaajat.

373. Radioaktiivisen radonkaasun määrä vähe-
nee radioaktiivisen hajoamisen seurauksena. Jäl-
jellä olevan kaasun massa voidaan laskea kaa-
valla $m = 0,83^t \cdot m_0$, missä t on aika vuorokau-
sina ja m_0 on massa hetkellä $t = 0$.

a) Kuinka monta prosenttia radonista hajoaa
vuorokaudessa?

Jos massa nyt on 75 mg, niin kuinka suuri massa

b) on 20 vuorokauden kuluttua

c) oli 10 vuorokautta sitten?

374. a) Kun laskettiin erään eksponenttifunkti-
on k^x , missä $k > 0$, arvo muuttujan x arvoilla
1,7 ja 2,3, jälkimmäinen arvo oli pienempi.
Mitä voit päätellä kantaluvusta k ?

b) Mikä ehto positiivisen kantaluvun k tulee
täyttää, jotta olisi $k^{-1,9} < k^{-1,8}$?

375. Heijastamaton lasi, jonka paksuus on
1,0 cm, pidättää 25 % valosta. Kuinka monta
prosenttia valosta pidättää samasta materiaalista
tehty lasi, jonka paksuus on

a) 1,3 cm b) 0,4 cm?

376. Suodatin, jonka paksuus on 1,0 cm, pidät-
tää 85 % tiettyä kokoa suuremmista ilman pö-
lyhiukkasista. Kuutiometrissä ilmaa, joka oli
suodatettu samasta materiaalista tehdyllä
2,7 cm paksulla suodattimella, oli 7 000 hiuk-
kasta. Kuinka paljon hiukkasia on kuutiometris-
sä puhdistamatonta ilmaa?

377. Kun kappale tuodaan ympäristöön, jonka
lämpötila pysyy muuttumattomana, lämpötilaero
tasoittuu, eli kappale jäähtyy tai lämpenee ympä-
ristön lämpötilaan. Yhtä pitkässä ajanjaksossa
lämpötilaero pienenee aina yhtä monta prosenttia.
Jälkiruoka, jonka lämpötila oli 90 °C, vietiin
ulos 10 °C:n lämpötilaan. Tunnin kuluttua jälki-
ruoka oli jäähtynyt 55 °C:n lämpöiseksi. Muo-
dosta funktio, joka ilmaisee jälkiruokan lämpöti-
lan x tunnin kuluttua ulos viemisestä. Laske
funktion avulla, mihin lämpötilaan jälkiruoka
jäähtyy a) 2,5 tunnissa b) viidessä tunnissa
c) kymmenessä tunnissa.

378. Täydennä taulukko.

x	$1,5^x$	x^4
1		
2		
3		
5		
10		

Kumpi funktio näyttää kasvavan nopeammin?
Tutki graafisen laskimen avulla tai laskemalla
funktioiden arvoja, jatkuuko suuntaus muuttujan
 x arvojen kasvaessa. Tuleeko $1,5^x$ ennen pitkää
suuremmaksi kuin x^4 ? Jos tulee, niin mikä on
muuttujan x ensimmäinen kokonaislukuarvo,
jolla $1,5^x > x^4$?

379. Tutki edellisen tehtävän tavoin eksponent-
tifunktiota $1,1^x$ ja potenssifunktiota x^{12} .

380. Laske laskimella $9^{\frac{1}{2}}$ ja $25^{\frac{1}{2}}$. Mitä voit
odottaa saavasi, jos lasket potenssin $49^{\frac{1}{2}}$ ar-
von? Entä, jos lasket potenssit $8^{\frac{1}{3}}$ ja $1000^{\frac{1}{3}}$?
Perustele, miksi näin on. (Vihje: potenssin po-
tenssin kaava.)

Murtopotenssi $a^{\frac{m}{n}}$

Kun määriteltiin potenssit, joiden eksponentti on negatiivinen kokonaisluku, nojaututtiin niin sanottuun laskulakien säilymisperiaatteeseen. Samaan periaatteeseen nojautumalla määritellään myös potenssit, joiden eksponentti on murtoluku.

JOHDANTOESIMERKKI 1

Oletetaan, että potenssin potenssin kaava $(a^r)^s = a^{rs}$ pätee kaikilla eksponentin r ja s arvoilla, kun kantaluku a on positiivinen.

a) Laske potenssin potenssin kaavan avulla luvun $5^{\frac{1}{2}}$ neliö.

Mikä luku $5^{\frac{1}{2}}$ itse asiassa on?

b) Mikä luku on $5^{\frac{1}{3}}$?

c) Mikä luku on $5^{\frac{1}{n}}$, missä n on positiivinen kokonaisluku?

Ratkaisu

a) Korotetaan luku $5^{\frac{1}{2}}$ potenssiin 2.

$$\begin{aligned} \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= 5^{\frac{1}{2} \cdot 2} & (a^r)^s &= a^{rs} \\ &= 5^1 = 5 \end{aligned}$$

Luvun $5^{\frac{1}{2}}$ neliö on 5. Lisäksi luku $5^{\frac{1}{2}}$ on positiivinen.

Siis luku $5^{\frac{1}{2}}$ on luvun 5 neliöjuuri: $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$.

b) Korotetaan luku $5^{\frac{1}{3}}$ potenssiin 3.

$$\begin{aligned} \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 &= 5^{\frac{1}{3} \cdot 3} & (a^r)^s &= a^{rs} \\ &= 5^1 = 5 \end{aligned}$$

Luvun $5^{\frac{1}{3}}$ kuutio on 5. Siis luku $5^{\frac{1}{3}}$ on luvun 5 kuutiojuuri:

$$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}.$$

c) Korotetaan luku $5^{\frac{1}{n}}$ potenssiin n .

$$\begin{aligned} \left(5^{\frac{1}{n}}\right)^n &= 5^{\frac{1}{n} \cdot n} & (a^r)^s &= a^{rs} \\ &= 5^1 = 5 \end{aligned}$$

Kun luku $5^{\frac{1}{n}}$ korotetaan potenssiin n , tulos on 5. Lisäksi potenssi $5^{\frac{1}{n}}$ on aina positiivinen. Siis luku $5^{\frac{1}{n}}$ on luvun 5 n . juuri: $5^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{5}$.

Vastaus

$$\text{a) } 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \quad \text{b) } 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} \quad \text{c) } 5^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{5}$$

Potenssin $a^{\frac{1}{n}}$ määritelmä

Oletetaan, että luku a on positiivinen ($a > 0$) ja että n on positiivinen kokonaisluku.

Luvun a potenssi $a^{\frac{1}{n}}$ on luvun a n . juuri.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Erityisesti potenssi $a^{\frac{1}{2}}$ on luvun a neliöjuuri.

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

ESIMERKKI 2

- a) Ilmaise juurina potenssit $7^{\frac{1}{5}}$ ja $3^{\frac{1}{2}}$.
 b) Ilmaise potensseina juuret $\sqrt[4]{12}$ ja $\sqrt{13}$.

Ratkaisu

a) $7^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{7}$ Kun eksponentti on $\frac{1}{5}$, potenssi on 5. juuri.

$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ Kun eksponentti on $\frac{1}{2}$, potenssi on toinen juuri eli neliöjuuri.

b) $\sqrt[4]{12} = 12^{\frac{1}{4}}$ Neljäs juuri on potenssi, jonka eksponentti on $\frac{1}{4}$.

$\sqrt{13} = 13^{\frac{1}{2}}$ Neliöjuuri eli toinen juuri on potenssi, jonka eksponentti on $\frac{1}{2}$.

Vastaus

a) $\sqrt[5]{7}$ ja $\sqrt{3}$ b) $12^{\frac{1}{4}}$ ja $13^{\frac{1}{2}}$

JOHDANTOESIMERKKI 3

Tulkitse potenssin potenssin kaavan avulla, mitä lukua tarkoittaa

potenssi $a^{\frac{4}{3}}$, missä $a > 0$.

Ratkaisu

Huomataan, että $\frac{4}{3} = 4 \cdot \frac{1}{3}$. Käytetään potenssin potenssin kaavaa toisen suuntaan: $a^{rs} = (a^r)^s$.

$$a^{\frac{4}{3}} = a^{4 \cdot \frac{1}{3}} \quad a^{rs} = (a^r)^s$$

$$= (a^4)^{\frac{1}{3}} \quad \text{Potenssi, jonka eksponentti on } \frac{1}{3}, \text{ on kolmas juuri.}$$

$$= \sqrt[3]{a^4}$$

Vastaus

$$a^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{a^4}$$

Potenssin $a^{\frac{m}{n}}$ määritelmä

Oletetaan, että luku a on positiivinen ($a > 0$) ja että m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja. Tällöin:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Potenssi, jonka eksponentti on $\frac{m}{n}$, on kantaluvun m . potenssin n . juuri.*

* Voitaisiin myös määritellä: $a^{\frac{m}{n}}$ on n . juuren m . potenssi, eli $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$. Johdantoesimerkissä 3 olisi päädytty tällaiseen muotoon, jos olisi kirjoitettu $\frac{4}{3} = \frac{1}{3} \cdot 4$. Totea tämä laskulla. Määritelmät johtavat samaan, sillä positiivisen luvun juuren potenssi on potenssin juuri: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ (tehtävä 402).

Yleistys negatiivisille eksponenteille tehdään kuten aikaisemmin.

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

Potenssi, jonka eksponentti on $-\frac{m}{n}$, on potenssin $a^{\frac{m}{n}}$ käänteisluku.

Murtolukueksponentteja käytettäessä tulee siis muistaa:

Potenssien $a^{\frac{m}{n}}$ määrittelyehto

Potenssit $a^{\frac{m}{n}}$, joiden eksponentti on murtolukumuodossa, on määritelty vain silloin, kun a on positiivinen ($a > 0$).

Ehdon välttämättömyyttä havainnollistetaan tehtävässä 401.

Voidaan osoittaa (tehtävä 403), että jos a on positiivinen ja r on rationaaliluku, niin potenssin a^r arvo ei riipu luvun r murtolukumuodosta. Nyt on siis määritelty kaikki potenssit a^r , missä r on rationaaliluku.

Potensseille, joiden eksponentti on rationaaliluku, pätevät kaikki aikaisemmat potenssikaavat:

$$(ab)^r = a^r \cdot b^r \quad \text{tulon potenssin kaava}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \quad \text{osamäärän potenssin kaava}$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad \text{samankantaisten potenssien tulon kaava}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad \text{samankantaisten potenssien osamäärän kaava}$$

$$(a^r)^s = a^{rs} \quad \text{potenssin potenssin kaava}$$

Kaavojen perusteleminen vaatisi pitkiä juurien määritelmiin perustuvia laskuja, joihin ei tässä ryhdytä.

ESIMERKKI 4

- a) Ilmaise potenssi $5^{1,3}$ juurimuodossa (muodossa $\sqrt[n]{a^m}$).
- b) Ilmaise juurilauseke $\sqrt[5]{7^4}$ murtopotenssina (muodossa $a^{\frac{m}{n}}$).

Ratkaisu

- a) Eksponentti 1,3 kirjoitetaan murtolukumuotoon: $1,3 = 1\frac{3}{10} = \frac{13}{10}$

$$5^{1,3} = 5^{\frac{13}{10}} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$= \sqrt[10]{5^{13}}$$

- b) Juurilausekkeen $\sqrt[5]{7^4}$ eksponentti 4 tulee murtopotenssimerkinnässä osoittajaksi ja juuren kertaluku 5 nimittäjäksi.

$$\sqrt[5]{7^4} = 7^{\frac{4}{5}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Vastaus

- a) $\sqrt[10]{5^{13}}$ b) $7^{\frac{4}{5}}$

ESIMERKKI 5

Oletetaan, että $a > 0$. Ilmaise

- a) lauseke $a^{-\frac{1}{2}}$ juurimuodossa
- b) lauseke $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ luvun a potenssina.

Ratkaisu

- a) Potenssi $a^{-\frac{1}{2}}$ on potenssin $a^{\frac{1}{2}}$ käänteisluku.

$$a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \qquad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\text{b) } \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{-\frac{1}{3}} \qquad \frac{1}{a^r} = a^{-r}$$

Vastaus

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{a}} \qquad \text{b) } a^{-\frac{1}{3}}$$

ESIMERKKI 6

Oletetaan, että $a > 0$. Ilmaise lauseke luvun a potenssina.

$$\text{a) } a\sqrt{a} \qquad \text{b) } \frac{1}{a^2\sqrt{a}}$$

Ratkaisu

$$\begin{aligned} \text{a) } a\sqrt{a} &= a^1 a^{\frac{1}{2}} \\ &= a^{1+\frac{1}{2}} \\ &= a^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Tekijät a ja $\sqrt{a}$ ilmaistaan a :n potensseina.

$$a^r a^s = a^{r+s}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1}{a^2\sqrt{a}} &= \frac{1}{a^2 a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a^{2+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{a^{\frac{5}{2}}} = a^{-\frac{5}{2}} \end{aligned} \qquad \frac{1}{a^r} = a^{-r}$$

Vastaus

$$\text{a) } a^{\frac{3}{2}} \qquad \text{b) } a^{-\frac{5}{2}}$$

Murtopotenssit tarjoavat mekaanisen tavan muokata juurilausekkeita. Juuret kirjoitetaan murtopotensseiksi ja käytetään potenssikaavoja.

ESIMERKKI 7

Sievennä lauseke a) $(\sqrt[4]{3})^2$ b) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$.

Ratkaisu

$$\text{a) } (\sqrt[4]{3})^2 = \left(3^{\frac{1}{4}}\right)^2$$

$$= 3^{\frac{1}{4} \cdot 2}$$

$$= 3^{\frac{2}{4}}$$

$$= 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

Eksponentti supistetaan.

$$\text{b) } \frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{4^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{2}{(2^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{2^{2 \cdot \frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{2^1}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

Luku 4 on luvun 2 potenssi: $4 = 2^2$.

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

Vastaus

$$\text{a) } \sqrt{3} \quad \text{b) } \sqrt[3]{2}$$

ESIMERKKI 8

Ratkaise yhtälö kolmen numeron tarkkuudella.

a) $x^6 = 3$ b) $x^{1,7} = 3$

Ratkaisu

a) $x^6 = 3$

Yhtälön juuret ovat luvun 3 kuudes juuri ja sen vastaluku.

$$x = \sqrt[6]{3} \approx 1,20 \text{ tai } x = -\sqrt[6]{3} \approx -1,20$$

Yhtälön ratkaisussa voidaan käyttää myös murtopotensseja.

$$x^6 = 3$$

$$x = 3^{\frac{1}{6}} \approx 1,20 \text{ tai } x = -3^{\frac{1}{6}} \approx -1,20$$

b) Potenssi $x^{1,7}$ on määritelty vain, kun $x > 0$. Yhtälöllä on siis vain positiivinen juuri. Juuri saadaan kääntämällä eksponentti.

$$x^{1,7} = 3$$

$$x = 3^{\frac{1}{1,7}} \approx 1,91$$

Tarkistetaan:

$$\left(3^{\frac{1}{1,7}}\right)^{1,7} = 3^{\frac{1}{1,7} \cdot 1,7} = 3^1 = 3$$

Siis luku $3^{\frac{1}{1,7}}$ toteuttaa yhtälön $x^{1,7} = 3$.

Vastaus

a) $x \approx 1,20$ tai $x \approx -1,20$ b) $x \approx 1,91$

Yleisen potenssiyhtälön ratkaiseminen

Oletetaan, että $a > 0$. Yhtälön

$$x^r = a$$

positiivinen juuri on

$$x = a^{\frac{1}{r}}.$$

Jos eksponentti r on muu kuin kokonaisluku, niin yhtälö $x^r = a$ on määritelty vain, kun $x > 0$. Tällöin luku $x = a^{\frac{1}{r}}$ on yhtälön ainoa juuri.

Perustelu

Korotetaan luku $a^{\frac{1}{r}}$ potenssiin r .

$$\left(a^{\frac{1}{r}}\right)^r = a^{\frac{1}{r} \cdot r} = a^1 = a$$

Siis luku $a^{\frac{1}{r}}$ toteuttaa yhtälön $x^r = a$.

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ**381.** Kirjoita juurena.

a) $11^{\frac{1}{2}}$ b) $3^{\frac{1}{7}}$

382. Ilmaise potenssina.

a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{6}$ c) $12\sqrt{6}$

383. Ilmaise juurimuodossa.

a) $3^{\frac{2}{5}}$ b) $2^{-\frac{1}{3}}$
c) $10^{-\frac{3}{2}}$ d) $2^{2,5}$

384. Ilmaise luvun 10 potenssina.

a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{10^{13}}$
c) $\sqrt{10^{12}}$ d) $\sqrt{1000}$

385. Ilmaise luvun 5 potenssina.

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$

386. Muuta lauseke muuttujan x ($x > 0$) potenssiksi.

a) $\sqrt{x}$ b) $x^2\sqrt{x}$ c) $x^3\sqrt{x}$

387. Ilmaise luvun 3 potenssina.

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$
d) $\frac{1}{9}$ e) $\frac{1}{9\sqrt{3}}$

388. Sievennä potenssikaavoilla.

a) $\frac{5}{\sqrt{5}}$ b) $(\sqrt[4]{5})^2$
c) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5}$ d) $12\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5}$

389. Ratkaise yhtälö kolmen numeron tarkkuudella.

a) $x^5 = 15$ b) $x^{4,3} = 15$

390. Radioaktiivisen isotoopin määrä väheni radioaktiivisen hajoamisen seurauksena 1,5 tunnissa 5,2 milligrammasta 2,6 milligrammaan. Hajoamiselle on ominaista, että määrä pienenee samanmittaisessa ajanjaksossa aina yhtä monta prosenttia. Kuinka monta prosenttia aineen määrä pienenee tunnissa?**391.** Heijastamaton muovilevy, jonka paksuus on 2,7 cm, päästää lävitseen 32 % levyyn tulevasta valosta. Kuinka monta prosenttia valosta päästää lävitseen samasta materiaalista tehty 1,0 cm paksu levy?SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ**392.** Muuta juurimuotoon.

a) $5^{\frac{1}{3}}$ b) $10^{-\frac{1}{2}}$
c) $7^{\frac{2}{3}}$ d) $7^{-\frac{2}{3}}$

393. Ilmaise luvun 2 potenssina.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{2}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
d) $\sqrt[3]{16}$ e) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

394. Ilmaise luvun 5 potenssina.

- a) $\sqrt{125}$ b) $5\sqrt{5}$ c) 1
 d) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ e) $\frac{1}{5}$ f) $\frac{1}{25}$
 g) $\frac{1}{25\sqrt{5}}$

395. Ilmaise luvun a ($a > 0$) potenssina.

- a) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ b) $\frac{1}{a}$ c) $\frac{1}{a\sqrt{a}}$
 d) $\frac{1}{a^3}$ e) $\frac{1}{a^3\sqrt{a}}$

396. Sievennä.

- a) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{3}}$

397. Sievennä.

- a) $\sqrt[6]{8}$ b) $\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[3]{4}$ c) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{2}}$

398. Ratkaise yhtälö kolmen numeron tarkkuudella.

- a) $x^{0,67} = 0,65$ b) $x^{\frac{3}{4}} = 1,9$
 c) $x\sqrt{x} = 2\,197$

399. Radonin isotoopin 244 puoliintumisaika on 3,66 vuorokautta. Kuinka monta prosenttia aineesta hajoaa vuorokaudessa?

400. Bakteeriviljelmän massa kasvoi 45 minuutissa 1,9-kertaiseksi. Oletetaan, että massa kasvaa eksponentiaalisesti. Kuinka moninkertaiseksi viljelmän massa kasvaa tunnissa?

401. Tässä tehtävässä nähdään, kuinka negatiivisten lukujen hyväksyminen murtopotenssin kantaluvuksi johtaisi ristiriitoihin.

a) Kun murtolukumuodossa oleva luku supistetaan tai lavennetaan, luku pysyy yhtä suurena.

Esimerkiksi $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. Vastaavasti täytyy silloin

olla $a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{6}}$. Koska myös negatiivisilla luvuilla on kuutiojuuri, näyttäisi mahdolliselta ulottaa

määritelmä $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ myös luvun a negatiivisille arvoille. Mikä silloin olisi potenssin $(-8)^{\frac{1}{3}}$

arvo? Laske toisaalta potenssin $(-8)^{\frac{2}{6}}$ arvo käyttämällä murtopotenssin määritelmää

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Ovatko potenssien $(-8)^{\frac{1}{3}}$ ja

$(-8)^{\frac{2}{6}}$ arvot yhtä suuret?

b) Etsi toinen samanlainen ristiriita.

402. Osoita, että $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, kun m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja ja $a > 0$.

403. Olkoon $a > 0$. Jotta potenssin a^r , missä r on rationaaliluku, arvo ei riippuisi luvun r murtolukumuodosta, tulee olla $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{pm}{pn}}$, missä

m , n ja p ovat positiivisia kokonaislukuja. Muotoile ehto murtopotenssin määritelmän mukaisessa juurimuodossa ja todista se.

Eksponentin ratkaiseminen

ESIMERKKI 1

Bakteeriviljelmän massa on nyt 25 g ja massa kaksinkertaistuu aina tunnissa. Minkä ajan kuluttua massa on a) 1 600 g b) 130 g?

Ratkaisu

a) Viljelmän massa kasvaa eksponentiaalisesti. Kun on kulunut x tuntia, viljelmän massa on $2^x \cdot 25$ g.

Ratkaistaan, kuinka monen tunnin kuluttua massa on 1 600 g.

$$2^x \cdot 25 = 1600 \quad | : 25 \text{ Ratkaistaan ensin } 2^x.$$

$$2^x = 64 \quad \text{Luku 64 on luvun 2 potenssi.}$$

$$2^x = 2^6 \quad \text{Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.}$$

$$x = 6$$

b) Ratkaistaan, kuinka monen tunnin kuluttua massa on 130 g.

$$2^x \cdot 25 = 130 \quad | : 25$$

$$2^x = 5,2$$

Luku 5,2 ei ole kantaluvun 2 kokonainen potenssi. Eksponenttifunktion 2^x kuvaajan perusteella ratkaisu on lukujen 2,3 ja 2,4 välissä.

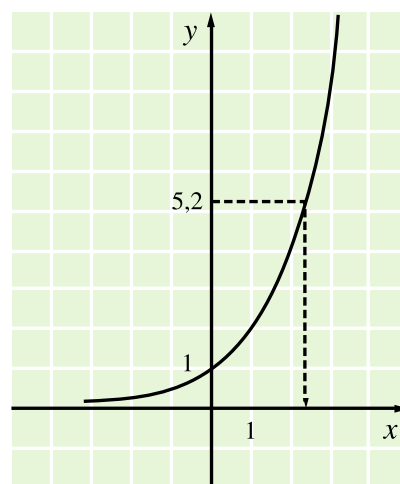
Haarukoidaan:

$$2^{2,3} \approx 4,92 \quad \text{Pienempi kuin 5,2.}$$

$$2^{2,4} \approx 5,28 \quad \text{Suurempi kuin 5,2.}$$

$$2^{2,35} \approx 5,10 \quad \text{Pienempi kuin 5,2.}$$

Yhtälön ratkaisu on lukujen 2,35 ja 2,4 välissä, joten ratkaisun yksidesimaalinen likiarvo on 2,4.*



Vastaus

a) 6 tunnin kuluttua b) 2,4 tunnin kuluttua

* Voidaan myös piirtää funktion 2^x kuvaaja graafisella laskimella ja määrittää yhtälön likimääräinen ratkaisu laskimen jäljitystoiminnolla (**TRACE**).

Eksponenttiyhtälö

Yhtälö, jossa tuntematon on eksponentissa, on *eksponenttiyhtälö*.

Jos eksponenttiyhtälön molemmat puolet voidaan ilmaista saman kantaluvun potensseina, niin yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

ESIMERKKI 2

Ratkaise eksponenttiyhtälö $16^x = 8$.

Ratkaisu

a) Luvut 16 ja 8 ovat molemmat luvun 2 potensseja, joten yhtälön molemmat puolet voidaan ilmaista luvun 2 potensseina.

$$16^x = 8$$

$$\text{Sijoitetaan } 16 = 2^4 \text{ ja } 8 = 2^3.$$

$$(2^4)^x = 2^3$$

$$\text{Potenssin potenssi } (a^m)^n = a^{mn}.$$

$$2^{4x} = 2^3$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

$$4x = 3 \quad | : 4$$

$$x = \frac{3}{4}$$

Vastaus

$$x = \frac{3}{4}$$

ESIMERKKI 3

Ratkaise yhtälö $7 \cdot 7^x = 49^{x-3}$.

Ratkaisu

Yhtälön molemmat puolet voidaan ilmaista luvun 7 potensseina.

$$7 \cdot 7^x = 49^{x-3}$$

$$\text{Sijoitetaan } 49 = 7^2.$$

$$7^1 \cdot 7^x = (7^2)^{x-3}$$

$$a^r a^s = a^{r+s} \text{ ja } (a^r)^s = a^{rs}$$

$$7^{1+x} = 7^{2(x-3)}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

$$1 + x = 2x - 6$$

$$7 = x$$

Vastaus

$$x = 7$$

ESIMERKKI 4

Jos vanhustenhoitopaikkojen lukumäärää lisätään vuosittain 3 %, niin kuinka monessa vuodessa hoitopaikkojen määrä kasvaa 50 %?

Ratkaisu

Olkoon a hoitopaikkojen nykyinen määrä. Hoitopaikkojen lukumäärä tulee joka vuosi 1,03-kertaiseksi, joten x vuoden kuluttua hoitopaikkojen määrä on $1,03^x a$.

Määrän tulee kasvaa 50 % eli tulla 1,5-kertaiseksi.

$$1,03^x a = 1,5a \quad | : a$$

$$1,03^x = 1,5$$

Luku 1,5 ei ole luvun 1,03 kokonainen potenssi.

Ratkaistaan yhtälö $1,03^x = 1,5$ *systemaattisella kokeilulla*. Apuna voidaan käyttää graafisella laskimella piirrettyä funktion $1,03^x$ kuvaajaa.

Funktion $1,03^x$ arvot suurenevat muuttujan x arvojen suuretessa. Aloitetaan ennakoarvauksella ja tarkennetaan.

$x = 10:$	$1,03^{10} \approx 1,34$	Pienempi kuin 1,5.
$x = 15:$	$1,03^{15} \approx 1,56$	Suurempi kuin 1,5.
$x = 13:$	$1,03^{13} \approx 1,47$	Pienempi kuin 1,5.
$x = 14:$	$1,03^{14} \approx 1,51$	Suurempi kuin 1,5.
$x = 13,5:$	$1,03^{13,5} \approx 1,49$	Pienempi kuin 1,5.

Yhtälön $1,03^x = 1,5$ juuri on lukujen 13,5 ja 14 välissä, joten vuosien tarkkuudella juuri on 14. Hoitopaikkojen määrä 1,5-kertaistuu 14 vuodessa.

Vastaus

14 vuodessa*

* Kurssissa Juuri- ja logaritmifunktiot opitaan ratkaisemaan tämän esimerkin tyyppiä olevat yhtälöt logaritmin avulla.

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

404. Keinottelija lupaa kaksinkertaistaa sijoituksesi joka vuosi. Annat hänelle sijoitettavaksi 1 500 euroa. Kuinka monen vuoden kuluttua sinulla on 24 000 euroa, jos keinottelijaan on luottaminen?

405. Päätele yhtälön ratkaisu funktion 2^x kuvaajasta yhden desimaalin tarkkuudella. Tarkista laskimella. Funktion 2^x kuvaaja on sivulla 142.

a) $2^x = 6$ b) $2^x = 1,6$

406. Ratkaise eksponenttiyhtälö.

a) $5^x = 125$ b) $5^x = 5$ c) $5^x = 1$

d) $5^x = \frac{1}{5}$ e) $5^x = \frac{1}{25}$

407. Ratkaise yhtälö.

a) $25^x = 5$ b) $16^x = 2$

408. Ratkaise yhtälö.

a) $5^x \cdot 8 = 1\,000$ b) $16 \cdot 2^{3x} = 2$

c) $3^{-x} = \frac{1}{27}$

409. Ratkaise.

a) $3 \cdot 3^x = 27^x$ b) $16 \cdot 2^x = 8^x$

410. Ratkaise kahden numeron tarkkuudella yhtälö $3^x = 300$.

411. Jos alkoholinkulutus kasvaa 4 % vuodessa, niin kuinka monessa vuodessa kulutus kaksinkertaistuu?

412. Jos liikenneonnettomuuksissa loukkaantuneiden määrää onnistuttaisiin joka vuosi vähentämään 5 %, niin kuinka monessa vuodessa loukkaantuneiden määrä vähenisi puoleen nykyisestä?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

413. Piirrä funktion 3^x kuvaaja ja päätele kuvaajasta eksponenttiyhtälön ratkaisu yhden desimaalin tarkkuudella. Tarkista laskimella.

a) $3^x = 6$ b) $3^x = 2$

414. Ratkaise yhtälö.

a) $10^x = 100\,000$ b) $10^x = 1$

c) $10^x = \frac{1}{1000}$ d) $10^x = 0,0001$

e) $10^x = 0$

415. Ratkaise yhtälö.

a) $32^x = 8$ b) $100^x = 1000$

416. Ratkaise yhtälö.

a) $5 \cdot 4^{3x} = 80$ b) $13 \cdot 3^{2x} = 351$

417. Ratkaise yhtälö.

a) $5^x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $5^x = 5\sqrt{5}$

c) $5^{2x} = \sqrt{5}$

418. Ratkaise.

a) $5 \cdot 5^x = 25^{x-1}$ b) $9^{x-1} - 27^x = 0$

c) $100^x = 1000^{1-x}$

419. Ratkaise.

a) $\frac{3 \cdot 9^x}{9 \cdot 3^x} = 81$ b) $\frac{3^x \cdot 9}{9^{2x}} = \frac{1}{81}$

420. Kuinka monessa vuodessa sijoitettu pääoma kasvaa kolminkertaiseksi, jos sijoitus tuottaa vuodessa 5 % korkoa.

421. Radioaktiivisesta aineesta cesium 137 hajoaa 2,3 % vuodessa. Ydinvoimalaonnettomuuden saastuttamalla alueella aineen määrä on kaksi kertaa niin suuri kuin turvallinen määrä. Kuinka monessa vuodessa aineen määrä vähenee turvallisuuksien raja-arvoon?

422. Ratkaise yhtälö kolmen numeron tarkkuudella.

a) $2^x = 500$

b) $0,99^x = 0,01$

423. Baktereita A on nyt 32 kertaa niin paljon kuin bakteereita B. Bakterien A määrä kaksinkertaistuu ja bakteerien B määrä kahdeksankertaistuu aina vuorokaudessa. Minkä ajan kuluttua molempia bakteereja on yhtä paljon?

424. Ratkaise yhtälö $1200^x = 9 \cdot 400^x$.

425. Ratkaise yhtälö kolmen numeron tarkkuudella.

a) $10^x = 6 \cdot 5^x$

b) $4600^x = 5 \cdot 2300^x$

Kertaus

Tässä luvussa kerrataan koko kurssi yksityiskohtaisten esimerkkien avulla. Teorian ja menetelmien kertauksen jälkeen on kertaustehtäviä, jotka ovat samojen otsikoiden mukaan järjestettyjä perustehtäviä. Kertausluku päättyy tehtäväsarjoihin, jotka sisältävät pääosin vaativampia tehtäviä koko kurssin alueelta.

Rationaaliluvut

Rationaaliluvut ovat lukuja, jotka voidaan ilmaista murtolukumuodossa $\frac{m}{n}$, missä m ja n ovat kokonaislukuja ($n \neq 0$).

Rationaalilukuja ovat erityisesti luonnolliset luvut $0, 1, 2, \dots$ ja kokonaisluvut

samoin kuin luvut, joiden desimaalimuoto on päättyvä tai jaksollinen.

Rationaalilukujen joukossa jokaisella luvulla on vastaluku. Luvun a vastaluku merkitään $-a$. Luvun ja sen vastaluvun summa on 0 .

Vastaluvun avulla vähennyslasku voidaan muuttaa yhteenlaskuksi:

$$a - b = a + (-b)$$

ja yhteenlasku vähennyslaskuksi:

$$a + b = a - (-b)$$

Jokaisella nollasta poikkeavalla rationaaliluvulla on käänteisluku. Luvun a käänteisluku merkitään $\frac{1}{a}$. Luvun ja sen käänteisluvun tulo on yksi.

Käänteisluvun avulla jakolasku voidaan muuttaa kertolaskuksi:

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}$$

eli

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \cdot a.$$

Luku $\frac{17}{11}$ on rationaaliluku.

$$-7 = \frac{-7}{1} = \frac{-14}{2} = \dots$$

$$7,23 = 7 \frac{23}{100} = \frac{723}{100}$$

Luvun 3 vastaluku on -3 .

Merkintä $-(-5)$ tarkoittaa luvun -5 vastalukua: $-(-5) = 5$.

$$2 - 7 = 2 + (-7)$$

$$x + 3 = x - (-3)$$

Luvun $-\frac{1}{7}$ käänteisluku on -7 .

Jos $a = \frac{2}{3}$, niin lausekkeen $\frac{1}{a}$ arvo on $\frac{3}{2}$.

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{2 \cdot \cancel{6}^2}{\cancel{3}_1 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{a}{5} = a \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot a$$

Ensimmäisen asteen yhtälö

Yhtälö säilyy yhtäpitävänä, jos yhtälön molemmille puolille lisätään tai molemmista puolista vähennetään sama luku tai jos molemmat puolet kerrotaan tai jaetaan samalla nollasta eroavalla luvulla. Tähän perustuu ensimmäisen asteen yhtälön ratkaisumenetelmä:

Muuttujan sisältävät termit siirretään yhtälön toiselle puolelle ja vakio termit toiselle puolelle. Kun termi siirretään puolelta toiselle, niin samalla vaihdetaan sen etumerkki.

Jos yhtälössä on nimittäjiä, niin

kaikki termit lavennetaan samannimisiksi ja

yhtälö kerrotaan yhteisellä nimittäjällä.

Toinen menetelmä on kertoa yhtälö sellaisella luvulla, joka supistaa nimittäjät pois.

$$5(x - 3) = 3x + 7$$

$$5x - 15 = 3x + 7 \quad | +15 - 3x$$

$$5x - 3x = 7 + 15$$

$$2x = 22 \quad | : 2$$

$$x = 11$$

$$\cancel{2} \frac{x}{3} + \cancel{3} \frac{1}{2} = \cancel{6} x$$

$$\frac{2x}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6x}{6} \quad | \cdot 6$$

$$2x + 3 = 6x$$

$$-4x = -3 \quad | : (-4)$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{2} = x \quad | \cdot 6$$

$$\cancel{2} \frac{x}{3} + \cancel{3} \frac{1}{2} = 6x$$

$$2x + 3 = 6x$$

$$3 = 4x \quad | : 4$$

$$x = \frac{3}{4}$$

Muuttujan sisältävät termit voidaan siirtää myös oikealle puolelle.

Verrannollisuus

Suoraan verrannolliset suureet muuttuvat samassa suhteessa.

Tuntemattomia arvoja voi ratkaista verrantoyhtälön avulla.

Jos suure y on suoraan verrannollinen suureen x , niin riippuvuutta kuvaa yhtälö, joka on muotoa $y = kx$, missä k on verrannollisuuskertoimen.

Kerroin k ratkaistaan sijoittamalla yhtälöön tunnetut arvot.

Jos 5 kg omenoita maksaa 7 euroa, niin kaksinkertainen määrä maksaa kaksinkertaisesti, kolminkertainen kolminkertaisesti jne. Omenaerän massa ja hinta ovat suoraan verrannolliset.

Ratkaistaan, kuinka paljon omenoita saa 15 eurolla.

omenaerän massa (kg)	omenaerän hinta (€)
5	7
x	15

$$\frac{5}{x} = \frac{7}{15}$$

$$7x = 5 \cdot 15$$

$$x = \frac{5 \cdot 15}{7} \approx 10,7 \text{ (kg)}$$

Jos x on omenaerän massa (kg) ja y omenaerän hinta (€), niin $y = kx$.

Koska $7 = k \cdot 5$, niin

$$k = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Siis $y = 1,4x$.

Kääntäen verrannolliset suureet muuttuvat käänteisessä suhteessa.

Tuntemattomia arvoja voidaan ratkaista verrantoyhtälön avulla.

Jos suure y on kääntäen verrannollinen suureen x , niin riippuvuutta kuvaa yhtälö, joka on muotoa $y = \frac{k}{x}$, missä k on verrannollisuuskertoimen.

Kerroin k ratkaistaan sijoittamalla yhtälöön tunnetut arvot.

Suure voi olla suoraan tai kääntäen verrannollinen toisen suureen neliöön, kuutioon, neliöjuureen jne.

Viiden maalarin porukka arvioi kunnostavansa talon ikkunat neljässä päivässä. Kaksinkertainen määrä maalareita tekee työn puolessa ajassa, kolminkertainen kolmasosassa jne. Maalarien määrä ja työn kesto ovat kääntäen verrannolliset.

Lasketaan, kuinka kauan työ kestää, jos maalareita on kaksi.

työn kesto (päivää)	maalarien määrä
4	5
t	2

Suureet muuttuvat käänteisessä suhteessa:

$$\frac{4}{t} = \frac{2}{5}$$

$$2t = 4 \cdot 5 \quad | : 2$$

$$t = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

Kaksi maalaria tekee työn 10 päivässä.

Jos n on maalarien määrä ja t työn kesto, niin $t = \frac{k}{n}$.

Koska $4 = \frac{k}{5}$, niin $k = 4 \cdot 5 = 20$. Siis $t = \frac{20}{n}$.

Jos y on suoraan verrannollinen x :n kuutioon, niin riippuvuutta kuvaava yhtälö on muotoa $y = kx^3$. Jos y on kääntäen verrannollinen x :n neliöjuureen, niin riippuvuutta kuvaava yhtälö on muotoa $y = \frac{k}{\sqrt{x}}$.

Potenssi

Toistuva muutos johtaa usein potenssilausekkeeseen.

Potensseja merkittäessä tulee kiinnittää huomiota sulkeiden käyttöön. Esimerkiksi, jos kantaluku on murtoluku tai negatiivinen luku, se tulee aina merkitä sulkeisiin.

Arvioidaan, että auton arvo alenee noin 15 % vuodessa. Vuoden kuluttua auton arvo on aina $100 \% - 15 \% = 85 \%$ edellisestä arvosta, eli arvo tulee joka vuosi 0,85-kertaiseksi. Jos auton hinta uutena on 30 000 euroa, niin auton arvo on

$$\begin{aligned} 1. \text{ vuoden kuluttua} & \quad 0,85 \cdot 30\,000 \\ 2. \text{ vuoden kuluttua} & \quad 0,85 \cdot 0,85 \cdot 30\,000 \\ & \quad = 0,85^2 \cdot 30\,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \text{ vuoden kuluttua} & \quad 0,85^7 \cdot 30\,000 \\ & \quad \approx 9\,600 \text{ (euroa)}. \end{aligned}$$

Luvun -3 toinen potenssi eli neliö merkitään $(-3)^2$. Potenssin arvo on 9.

Merkintä -3^2 tarkoittaa luvun 3 neliön vastalukua eli potenssin kantaluku on 3. Siis $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$.

Potenssilausekkeen sieventäminen

Potenssilausekkeitä voi sieventää purkamalla potenssit määritelmän mukaisesti tuloiksi ja käyttämällä laskutoimitusten ominaisuuksia.

Potenssilausekkeitä voi sieventää myös käyttämällä niin sanottuja potenssikaavoja.

Tulon potenssi

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Tulon tekijät korotetaan potenssiin n .

Osamäärän potenssi

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Jakaja ja jaettava korotetaan potenssiin n .

Samankantaisten potenssien tulo

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

EkspONENTiksi tulee eksponenttien summa.

Samankantaisten potenssien osamäärä

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

EkspONENTiksi tulee eksponenttien erotus.

Potenssin potenssi

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

EkspONENTiksi tulee eksponenttien tulo.

$$x(3x)^2 = x \cdot 3x \cdot 3x = 3 \cdot 3 \cdot xxx = 9x^3$$

$$\frac{x^2}{x^5} = \frac{\cancel{x}\cancel{x}}{\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}} = \frac{1}{xxx} = \frac{1}{x^3}$$

$$(5x)^3 = 5^3 x^3 = 125x^3$$

$$(2,3 \cdot 10^{18})^2 = 2,3^2 \cdot (10^{18})^2 = 5,29 \cdot 10^{36}$$

$$\left(\frac{x}{5}\right)^4 = \frac{x^4}{5^4} = \frac{x^4}{625}$$

$$\frac{12^4}{36^4} = \left(\frac{12}{36}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1^4}{3^4} = \frac{1}{81}$$

$$x \cdot x^3 \cdot x^7 = x^{1+3+7} = x^{11}$$

$$\frac{\cancel{2}x^{12}}{\cancel{6}x^4} = \frac{x^{12}}{3x^4} = \frac{x^{12-4}}{3} = \frac{x^8}{3}$$

$$(3^{12})^8 = 3^{12 \cdot 8} = 3^{96}$$

$$(3x^5)^2 = 3^2 (x^5)^2 = 9x^{5 \cdot 2} = 9x^{10}$$

Eksponentti 0 ja negatiivinen eksponentti

Jos luku a on eri suuri kuin 0, niin potenssin a^0 arvo on 1.

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

Potenssi, jonka eksponentti on negatiivinen kokonaisluku määritellään:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad n. \text{ potenssin käänteisluku}$$

Määritelmä voidaan myös tulkita:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad \text{käänteisluvun } n. \text{ potenssi}$$

$$(-17)^0 = 1$$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

$$0,0001 = \frac{1}{10\,000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$$

$$xx^{-3} = x \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{\overset{1}{\cancel{x}}}{\underset{x^2}{\cancel{x^3}}} = \frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$

Kymmenpotenssimuoto

Luvun 10 potensseja käytetään usein lukujen merkitsemiseen.

Kymmenpotenssi muutetaan tavalliseen muotoon.

Luku muutetaan kymmenpotenssimuotoon.

Kymmenpotenssimuodossa oleva luku voidaan syöttää laskimeen näppäimen **EXP** (tai **EE** tms.) avulla.

$$6,8 \cdot 10^7 = 6,8 \cdot 10\,000\,000 = 68\,000\,000$$

$$8,5 \cdot 10^{-5} = 8,5 \cdot 0,000\,01 = 0,000\,085$$

Luku 729 841 456 kymmenpotenssimuodossa pyöristettynä kolmen numeron tarkkuuteen on

$$729\,841\,456 = 7,29\,841\,456 \cdot 100\,000\,000 \approx 7,30 \cdot 10^8.$$

$$0,000\,681 = 6,81 \cdot 0,000\,1 = 6,81 \cdot 10^{-4}$$

Luku $9,2 \cdot 10^{27}$ syötetään
9.2 **EXP** 27.

Luku $5,4 \cdot 10^{-9}$ syötetään
5.4 **EXP** 9 **±**
tai 5.4 **EXP** **(-)** 9.

Neliöjuuri

Luvun a neliöjuuri $\sqrt{a}$ on epänegatiivinen luku, jonka neliö on a :

$$(\sqrt{a})^2 = a \text{ ja } \sqrt{a} \geq 0.$$

Vain epänegatiivisilla luvuilla on neliöjuuri, eli $\sqrt{a}$ on määritelty, kun $a \geq 0$.

Neliöyhtälö $x^2 = a$, jossa $a \geq 0$, toteutuu, kun

$$x = \sqrt{a} \text{ tai } x = -\sqrt{a}$$

Neliöjuurilla laskeminen

Neliöjuurien tulo on tulon neliöjuuri.

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$$

Neliöjuurien osamäärä on osamäärän neliöjuuri.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$$

Jos juurettavalla kokonaisluvulla on tekijänä kokonaisluvun neliö, niin neliöjuurta voidaan sieventää niin, että juurettavaksi tulee pienempi kokonaisluku.

Saman luvun neliöjuuret voidaan yhdistää.

$$\sqrt{0} = 0$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$\sqrt{7}$ on positiivinen luku, jonka neliö on 7 eli $(\sqrt{7})^2 = 7$.

$\sqrt{-9}$ ei ole määritelty.

$$x^2 = 7$$

$$x = \sqrt{7} \text{ tai } x = -\sqrt{7} \text{ (Ratkaisujen tarkat arvot)}$$

$$\sqrt{50} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{50 \cdot 2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{2}{18}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{300} = \sqrt{100 \cdot 3} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = (1 - 6)\sqrt{3} = -5\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{8} + \sqrt{18} &= \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} \\ &= \sqrt{4}\sqrt{2} + \sqrt{9}\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Korkeammat juuret

Parillinen kertaluku n

Luvun a n . juuri $\sqrt[n]{a}$ on epänegatiivinen luku, jonka n . potenssi on a .

$\sqrt[n]{a}$ on määritelty, kun $a \geq 0$.

Yhtälö $x^n = a$, missä $a \geq 0$, toteutuu, kun

$$x = \sqrt[n]{a} \text{ tai } x = -\sqrt[n]{a}.$$

Pariton kertaluku n

Luvun a n . juuri $\sqrt[n]{a}$ on luku, jonka n . potenssi on a .

$\sqrt[n]{a}$ on määritelty kaikilla a :n arvoilla.

Yhtälö $x^n = a$ toteutuu, kun

$$x = \sqrt[n]{a}.$$

$$\sqrt[4]{10\,000} = 10, \text{ sillä } 10^4 = 10\,000.$$

$\sqrt[4]{-81}$ ei ole määritelty.

$$x^{12} = 3,5$$

$$x = \sqrt[12]{3,5} \approx 1,11 \text{ tai } x = -\sqrt[12]{3,5} \approx -1,11$$

$$\sqrt[3]{1000} = 10, \quad \sqrt[3]{-27} = -3$$

$$x^{15} = 0,12$$

$$x = \sqrt[15]{0,12} \approx 0,87$$

Eksponentti murtoluku

Potenssit, joissa eksponentti on murtoluku, ovat määriteltyjä vain silloin, kun kantaluku on positiivinen. Jos m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja, niin

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

ja

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \quad (a > 0).$$

Erityisesti potenssi, jonka eksponentti on $\frac{1}{n}$, on n . juuri.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (a > 0)$$

Murtopotenssien avulla saadaan aina potenssiyhtälön positiivinen juuri.

Yhtälön $x^s = a$, missä $a > 0$, positiivinen juuri on $x = a^{\frac{1}{s}}$.

Potenssikaavat pätevät myös silloin, kun eksponenttina on murtoluku. Kaavat tarjoavat mekaanisen keinon sieventää juurilausekkeita.

$$5^{\frac{7}{9}} = \sqrt[9]{5^7}$$

$$5^{-\frac{7}{9}} = \frac{1}{5^{\frac{7}{9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{5^7}}$$

$$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$$

$$5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Yhtälöllä $x^{5,9} = 2$ on vain positiivinen juuri.

Juuri on $x = 2^{\frac{1}{5,9}} \approx 1,12$.

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[3]{2} &= 16^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = (2^4)^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{4 \cdot \frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = 2^1 = 2 \end{aligned}$$

Eksponenttifunktio

Funktio k^x on eksponenttifunktio. Kantaluvun k tulee olla positiivinen. Muuttuja x voi saada mitä tahansa arvoja.

Jos bakteerikannan massa tulee joka tunti 1,9-kertaiseksi ja massa on nyt 14 g, niin x tunnin kuluttua bakteerikannan massa on $1,9^x \cdot 14$ (g).

Bakteerikannan suuruutta voidaan siis kuvata eksponenttifunktion avulla eli eksponentiaalisella mallilla.

1,5 tunnin kuluttua massa on $1,9^{1,5} \cdot 14 \approx 37$ (g).

40 minuuttia sitten massa oli $1,9^{\frac{40}{60}} \cdot 14 \approx 9,1$ (g).

Eksponenttiyhtälö

Eksponenttiyhtälössä muuttuja on eksponentissa.

Joskus eksponenttiyhtälö voidaan ratkaista niin, että yhtälön molemmat puolet ilmaistaan saman kantaluvun potensseina.

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

Eksponenttiyhtälöitä voi ratkaista likimääräisesti systemaattisella kokeilulla.

$$1,08^x = 5, \quad 2 \cdot 8^x = 32^x$$

$$2 \cdot 8^x = 32^x$$

$$2 \cdot (2^3)^x = (2^5)^x$$

$$2^1 \cdot 2^{3x} = 2^{5x}$$

$$2^{1+3x} = 2^{5x}$$

$$1 + 3x = 5x$$

$$1 = 2x \quad | : 2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Kuinka monessa vuodessa sijoitettu pääoma viisinkertaistuu, jos vuotuinen korkotuotto on 8 %?

Jos pääoman alkuperäinen arvo on a , niin saadaan eksponenttiyhtälö:

$$1,08^x a = 5a \quad | : a$$

$$1,08^x = 5$$

Funktion $1,08^x$ arvot suurenevät muuttujan x arvojen kasvaessa. Aloitetaan ennakoarvauksella ja tarkennetaan.

$$x = 20: \quad 1,08^{20} \approx 4,67 \quad \text{Pienempi kuin } 5.$$

$$x = 21: \quad 1,08^{21} \approx 5,03 \quad \text{Suurempi kuin } 5.$$

$$x = 20,5: \quad 1,08^{20,5} \approx 4,84 \quad \text{Pienempi kuin } 5.$$

Yhtälön juuri on lukujen 20,5 ja 21 välissä, joten juuri on vuosien tarkkuudella 21. Pääoma viisinkertaistuu 21 vuodessa.

KERTAUSTEHTÄVIÄ

Tehtävät ovat kertausluvun otsikoiden mukaan järjestettyjä perustehtäviä.

RATIONAALILUVUT

426. Saata lauseke sellaiseen muotoon, jossa ei ole sulkeita.

- a) $5(3 - a)$ b) $5(3a)$
 c) $-5(3 - (-a))$ d) $-5(-3)(-a)$

427. Laske kaksi seitsemäsosaa lukujen $1\frac{1}{2}$ ja $\frac{5}{6}$ summasta.

428. Laske lukujen -1 ja $\frac{2}{5}$ summan ja erotuksen osamäärä.

429. Laske luvun $-\frac{5}{12}$ vastaluvun ja luvun $\frac{4}{5}$ käänteisluvun summa.

ENSIMMÄISEN ASTEEN YHTÄLÖ

430. Ratkaise yhtälö.

- a) $0,4(x - 1) = x + 5$
 b) $4(2x + 3) - 7 = 15x + 5$

431. Ratkaise yhtälö.

- a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 5 = x$
 b) $\frac{2x}{3} - \frac{x}{6} = \frac{x}{2} + 1$

432. Ratkaise yhtälö.

- a) $\frac{x+2}{4} = \frac{x-1}{7}$
 b) $\frac{3x+1}{4x+2} = 3$

433. Millä vakion a arvoilla luku 3 on yhtälön $\frac{ax}{6} + \frac{x}{3} = \frac{a}{3}$ juuri?

434. Kallen, Eeron ja Elinan opiskelija-asunnon puhelinlasku 120 euroa päätetään jakaa samassa suhteessa kuin puheluaikat: Kalle 107 minuuttia, Eero 15 minuuttia ja Elina 32 minuuttia. Kuinka paljon kukin maksaa?

435. Erään päivän kaloista kolme neljäsosaa saatiin verkolla, viidesosa katiskalla ja kolme kalaa ongella. Kuinka suuri oli päivän kalansaalos?

436. 3,25 metrin pituinen käytävämatto alkaa ja päättyy 8,0 cm:n levyisellä punaisella raidalla, joita on matossa tasaisin välein yhteensä 12. Mikä on punaisten raitojen väli?

VERRANNOLLISUUS

437. Ritva luki 560-sivuisesta kirjasta ensimmäiset 140 sivua 3,5 tunnissa. Kuinka kauan jäljellä olevan osan lukeminen vie aikaa?

438. Luistinradan auraus kestää 25 minuuttia, kun traktorin edessä on 125 cm leveä aura. Paljonko aurausaika lyhenee, kun otetaan käyttöön 150 cm leveä aura?

439. Niittotalkoot sujuivat viime vuonna 12 tunnissa. Paljonko menee samaan työhön aikaa tänä vuonna, kun talkooväkeä on 50 % enemmän?

440. Timantin arvo on suoraan verrannollinen massan neliöön. Korkealaatuinen neljän karaatin timantti maksaa 300 euroa.

- a) Kuinka paljon maksaa samanlaatuinen 50 karaatin timantti?
 b) Ilmaise timantin arvon riippuvuus massasta yhtälön avulla.

441. Valaistus on kääntäen verrannollinen valonlähteen etäisyyden neliöön. 5,4 metrin etäisyydellä valonlähteestä valaistus oli lehtien lukuun riittävä 300 luksia.

- a) Vaatimaan piirustustyön tarvittava valaistus on vähintään 2 000 luksia. Riittääkö valaistus 2,0 metrin etäisyydellä valonlähteestä?
 b) Ilmaise valaistuksen riippuvuus valonlähteen etäisyydestä yhtälön avulla.

POTENSSI

442. Villen 16-vuotispäivänä pitsa maksoi 7 euroa. Jos vuotuinen inflaatioprosentti on 4 %, niin kuinka paljon samanlainen pitsa maksaa, kun Ville viettää 70-vuotisjuhlia?

443. Pölysuodatin pidättää 65 % pölyhiukkasista. Kuinka monta hiukkasta miljoonasta pääsee neljän peräkkäisen suodattimen läpi?

444. Leilan syntyessä kummitäti avaa tilin. Hän haluaa, että Leilan täyttäessä 20 vuotta tilillä on 4 000 euroa. Kuinka paljon tilille on sijoitettava alkupääomaksi, jos vuotuinen korko on 5 %?

POTENSSILAUSEKKEEN SIEVENTÄMINEN

445. Merkitse lauseke ja laske sen arvo, kun $a = 3$.

- a) luvun a neliön vastaluvun ja luvun a kuuti-on summa
 b) luvun a vastaluvun neliön ja luvun a kuuti-on summa

446. Sievennä.

- a) $(-5x)^3$ b) $x\left(\frac{2}{x}\right)^4$
 c) $-a^2(-a^3)^2$ d) $\frac{(3a^4)^3}{9a^3}$

447. Sievennä.

- a) $(-6s)^2 - 6s^2$
 b) $(-6s)^2 (-6s^2)$
 c) $-6s^2 - (-6s)^2$

448. Laske.

- a) $\frac{6^{18}}{6^{21}}$ b) $\frac{5^4}{15^4}$ c) $\frac{7 \cdot 10^5}{70^5}$

449. Ilmaise luku luvun 5 potenssina.

- a) 125^{17} b) $5 \cdot 25^7$ c) $\frac{125^{11}}{25^9}$

450. Laske lausekkeen $(16x^3)^2$ arvo, kun $x = 2,5 \cdot 10^{200}$.

451. Käytä hyväksi tietoa $2^{10} = 1024$ ja päätele, kumpi luvuista 2^{10000} ja 10^{3000} on suurempi.

**EKSPONENTTI 0 JA NEGATIIVINEN
EKSPONENTTI**

452. Laske.

- a) 7^0 b) 7^{-1}
c) 7^{-3} d) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2}$

453. Laske.

- a) $2 \cdot 3^{-1}$ b) $(2 \cdot 3)^{-2}$
c) $6 \cdot 6^{-4}$ d) $6^{-1} \cdot 6^{-3}$

454. Sievennä lauseke.

- a) $3xx^{-2}$ b) $-x^4(-3x)^{-2}$
c) $-3x^{-4}(-x^2)$

KYMMENPOTENSSESIMUOTO

455. Kirjoita luku ilman kymmenen potenssia.

- a) $3,8 \cdot 10^8$ b) $7,12 \cdot 10^{-5}$

456. Ilmaise luku kymmenpotenssimuodossa pyöristettynä kolmen numeron tarkkuuteen.

- a) 79 962 145 600
b) 0,000 008 09675

457. Kuinka monta numeroa on kokonaisluvussa 3^{57} ? Mitkä ovat luvun kaksi ensimmäistä numeroa?

458. Kuinka kauan kestää televisiokuvan kulku Yhdysvalloista Suomeen? Matka satelliitin kautta on noin 80 000 km. Kuvasignaali kulkee valon nopeudella $3,0 \cdot 10^8$ m/s.

459. Uraaniatomin massa on $4,0 \cdot 10^{-22}$ g. Kuinka monta uraaniatomia on 238 grammassa uraania?

NELIÖJUURI

460. Määritä.

- a) $\sqrt{169}$ b) $\sqrt{169^2}$
c) $\sqrt{169^2 - 119^2}$ d) $\sqrt{119^2 - 169^2}$

461. Määritä.

- a) $\sqrt{4 + 9 + 36}$ b) $\sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{36}$

462. Määritä.

- a) $\sqrt{\frac{16}{49}}$ b) $\sqrt{\frac{16}{49} + \frac{9}{25}}$

463. Minkä luvun neliöjuuri on

- a) 25 b) -7?

464. Laske.

- a) $(\sqrt{3})^2$ b) $(4\sqrt{3})^2$
c) $(\sqrt{5})^3$ d) $(5\sqrt{2})^3$

465. Viljeltyjä pelloja on Suomessa 2 500 000 hehtaaria. Mikä on

- a) samankokoisen neliön sivun pituus
b) samankokoisen ympyrän halkaisija?

(Ympyrän pinta-ala $A = \pi r^2$, missä r on ympyrän säde.)

466. Ratkaise yhtälö.

- a) $3x^2 = 15$ b) $5x^2 + 45 = 0$

467. Jos neljän karaatin timantti maksaa 300 euroa, niin kuinka suuren samanlaatuisen timantin saa 5 000 eurolla? Timantin arvo on suoraan verrannollinen massan neliöön.

NELIÖJUURILLA LASKEMINEN

468. Sievennä.

a) $\sqrt{3} \sqrt{75}$ b) $\sqrt{6} \sqrt{30}$

469. Sievennä.

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{72}}$ b) $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{5}}$

470. Sievennä.

a) $\sqrt{125}$ b) $\sqrt{1250}$

471. Laske.

a) $\sqrt{3} (2\sqrt{3} - \sqrt{6})$
b) $3\sqrt{5} - \sqrt{3} - 4\sqrt{5} + \sqrt{3}$

472. Laske.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ b) $\sqrt{27} - \sqrt{12}$

KORKEAMMAT JUURET

473. Määritä

- a) luvun 16 807 viides juuri
- b) luvun 729 kuudes juuri
- c) luvun -1 seitsemäs juuri
- d) luvun -1 kahdeksas juuri.

474. Ratkaise yhtälö.

a) $5x^6 = 20\,480$ b) $3x^4 + 12\,288 = 0$
 c) $3x^3 + 12\,288 = 0$

475. Taajaman hallittu kasvu edellyttää, että väkiluku saa seuraavan kahdeksan vuoden aikana kohota nykyisestä 12 000:sta korkeintaan 15 000:een. Kuinka suuri saa taajaman keskimääräinen vuotuinen väestönkasvuprosentti korkeintaan olla?

EKSPONENTTI MURTOLUKU

476. Muuta juurimuotoon.

a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $5^{-\frac{1}{2}}$
 c) $3^{\frac{2}{7}}$

477. Ilmaise potenssina.

a) $\sqrt{7}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$

478. Ilmaise luvun k potenssina, missä $k > 0$.

a) $k^3 \sqrt{k}$ b) $\frac{1}{k^3 \sqrt{k}}$

479. Sievennä.

a) $\frac{\sqrt[3]{7} \sqrt[6]{7}}{7}$ b) $\frac{\sqrt[6]{3}}{\sqrt[3]{9}}$

480. Ratkaise yhtälö kolmen numeron tarkkuudella.

a) $x^{\frac{2}{3}} = 17$ b) $x^{-1,9} = 4,9$

481. Titaanin erään isotoopin määrä vähenee radioaktiivisen hajoamisen tuloksena puoleen 4,20 minuutissa. Kuinka monta prosenttia isotoopista hajoaa minuutissa?

EKSPONENTTIFUNKTIO

482. Heijastamaton erikoislasi, jonka paksuus on 1,0 cm, pidättää 23 % siihen tulevasta auringon lämpösäteilystä. Kuinka monta prosenttia lämpösäteilystä pidättää samanlainen lasi, jonka paksuus on

- a) 0,7 cm b) 2,5 cm?

483. Maapallon väkiluku vuonna 1980 oli 4,5 miljardia ja vuonna 2004 6,4 miljardia.

- a) Kuinka monta prosenttia väkiluku keskimäärin kasvoi vuodessa?
 b) Valitse lähtökohdaksi ($x = 0$) vuosi 1980 ja muodosta funktio, jonka avulla voidaan ennustaa väkiluku x vuoden kuluttua vuodesta 1980.
 c) Laske b-kohdan funktion avulla ennuste maapallon väkiluvulle vuonna 2020. Minkä arvion funktio antaa maapallon väkiluvulle vuonna 1900?

484. Erään bakteeriviljelmän massa kasvaa eksponentiaalisesti niin, että massa 3,0-kertaistuu vuorokaudessa. Massa on nyt 25,3 g.

- a) Kuinka suuri massa on 10 tunnin kuluttua?
 b) Kuinka suuri massa oli neljä tuntia sitten?

EKSPONENTTIYHTÄLÖ

485. Ratkaise yhtälö.

- a) $8^x = 1$ b) $8^x = 4$ c) $8 \cdot 8^x = 2$

486. Ratkaise yhtälö $2 \cdot 16^x = 4^x$.

487. Ratkaise.

- a) $2^x = 2\sqrt{2}$ b) $2^x = \frac{1}{4\sqrt{2}}$

488. Ratkaise kahden numeron tarkkuudella yhtälö $0,98^x = 0,5$.

489. Yrityksen liikevaihto on viime vuosina kasvanut keskimäärin 12 % vuodessa. Liikevaihto on nyt 250 miljoonaa euroa. Jos kasvu jatkuu samanlaisena, niin kuinka monen vuoden kuluttua liikevaihto ylittää miljardiin euroon?

TEHTÄVÄSARJOJA

SARJA A

1. Suorakulmion pituus kasvaa 25 % ja leveys pienenee 25 %. Kuinka muuttuu suorakulmion pinta-ala?
2. Viisitoista ystävää päätti ostaa Martille 60-vuotislahjaksi pullon päivänsankarin syntymävuoden portviiniä. Jokainen osallistuisi lahjaan yhtä suurella rahasummalla. Kolme muuta ystävää kuuli lahjahankkeesta ja liittyi mukaan. Maksuksi henkeä kohden tuli nyt 2,50 euroa vähemmän kuin alunperin oli suunniteltu. Kuinka kalliista lahjasta oli kysymys?
3. Laske lausekkeen $x^3 + 5x^2 - 7x - 3$ arvo, kun $x = 3\sqrt{2}$.
4. Heikin videokamera vaatii vähintään 80 luksin valaistuksen. Pimeänä syysiltana viiden metrin päässä kokosta mitattiin valaistukseksi 300 luksia. Kuinka kaukana kokosta voi kuvata ilman lisävaloa? Valaistus on kääntäen verrannollinen valonlähteestä mitatun etäisyyden neliöön.
5. Cesiumin isotoopin 137 puoliintumisaika (aika, jossa määrä vähenee puoleen) on 29 vuotta. Kyseistä isotooppia karkasi Tshernobylin ydinvoimalan ympäristöön ja ilmavirtausten mukana aina Suomeenkin saakka ydinvoimalassa 26.4.1986 tapahtuneessa onnettomuudessa. Kuinka monta prosenttia tuolloin luontoon vapautuneesta radioaktiivisesta aineesta oli vielä jäljellä huhtikuun lopulla vuonna 2005?
6. Positiivisten lukujen geometrinen keskiarvo määritellään seuraavasti: Jos lukuja on n kappaletta, niiden geometrinen keskiarvo on lukujen tulon n . juuri. Olkoon d positiivisen lukujen a, b ja c geometrinen keskiarvo. Osoita, että luku d on myös lukujen a, b, c ja d geometrinen keskiarvo.

SARJA B

1. On valmistettava kuution muotoinen mitta-astia, jonka tilavuus on 2 desilitraa. Laske kuution särmän pituus millimetrin tarkkuudella.
2. Laura ja Pekka päättivät jakaa 585 euron palkkion niin, että Pekka saa 20 % vähemmän kuin Laura. Kuinka palkkio jaetaan?
3. Minkä luvun neliöjuuri luku $\sqrt{10} + \sqrt{40} + \sqrt{90} + \sqrt{160}$ on?
4. Puumäärä metsäpalstalla vuoden 1998 kasvukauden alkaessa oli 12 000 m³. Vuosikasvu lisää puumäärää joka vuosi 6,0 %, ja joka syksy kasvukauden päätyttyä puustoa vähennetään vuosihakkuilla 4,5 %. Mikä on vuosihakkuiden suuruus vuonna 2018?
5. Laske lausekkeen $2\sqrt[3]{5}a - a^3$ tarkka arvo, kun $a^6 = 5$ ja $a > 0$.
6. Käytettävissä on 400 grammaa 85-prosenttista kultaa ja 250 grammaa 60-prosenttista kultaa. Kuinka paljon 75-prosenttista kultaa voidaan näitä sekoittamalla valmistaa?

SARJA C

1. Ratkaise yhtälö $\frac{3x}{4} + \frac{x}{6} = 2x + 1$.
2. Tuoremehu valmistetaan lisäämällä mehutiivisteseen vettä. Mehua päätettiin laimentaa pienentämällä tiivistepitoisuutta kolme prosenttiyksikköä nykyisestä 26 %:sta. Kuinka monta prosenttia enemmän mehua saadaan samasta määrästä tiivistettä?
3. Autoliikenne kaupungissa vuonna 2004 oli 40 % suurempi kuin vuonna 1994. Tällöin päätettiin, että vuoden 2005 alusta alkaen ryhdytään toteuttamaan suunnitelmaa, joka onnistuessaan vähentää liikennettä 4 % vuodessa. Jos suunnitelman toteuttamisessa onnistutaan, niin kuinka monta prosenttia vuoden 2014 liikenne on vuoden 1994 liikennettä suurempi tai pienempi?
4. Naistenlehdessä annettiin vinkkejä talvi-autoiluun. Yksi vinkki oli, että nopeuden vähentäminen neljänneksellä puolittaa jarrutusmatkan. Kuinka tarkka tämä nyrkkisääntö on, eli kuinka monta prosenttia puolittunut jarrutusmatka on todellista lyhentynyttä jarrutusmatkaa pitempi tai lyhyempi? Kuinka monta prosenttia nopeutta tulisi alentaa, jotta jarrutusmatka todella puolittuisi? Jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön.
5. Osoita, että lausekkeen $\frac{5^{n+1}25^{n+2}}{125^n}$ arvo ei riipu positiivisen kokonaisluvun n arvosta.
6. Kaksi samanlaista juomapulloa vietiin 1,5 tunnin välein 4 °C:n lämpöisestä jääkaapista ulos 27 °C:n helteeseen varjoiselle pöydälle. Kun ensimmäinen pullo oli ollut ulkona neljä tuntia, pullot avattiin. Juoman lämpötilaksi ensimmäisessä pullossa mitattiin 21 °C. Mikä on toisessa pullossa olevan juoman lämpötila? Juoman ja ulkoilman lämpötilaero pienenee yhtä pitkässä ajanjaksossa aina yhtä monta prosenttia.

SARJA D

1. Kampaamoyrittäjä lisää tukanleikkuun hintaan 22 %:n arvonlisäveron. Kuinka paljon asiakkaan maksamasta 27 euron hinnasta on arvonlisäveroa?
2. Viitenä peräkkäisenä vuotena erään elektronikkatuotteen hinta aleni 4,3 %, 7,2 %, 12,0 %, 13,1 % ja 5,2 %.
a) Kuinka monta prosenttia hinta laski koko ajanjakson aikana?
b) Montako prosenttia hinta laski keskimäärin vuodessa?
3. Tuulivoimalasta saatava teho on suoraan verrannollinen voimalan potkurin lavan pituuden neliöön. Kuinka pitkä lapa tulee suunnitella voimalaan, jotta se yksinään antaisi saman tehon, kuin seitsemän pienempää voimalaa, joissa jokaisessa on 123 cm pitkä lapa?
4. Kuution A pinta-ala on 70 % suurempi kuin kuution B pinta-ala. Kuinka monta prosenttia kuution A tilavuus on kuution B tilavuutta suurempi? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.
5. Junan nykyisellä nopeudella kahden kaupungin välinen matka kestää 2 tuntia 6 minuuttia. Jos keskinopeutta nostetaan 20 km/h, aika lyhenee 15 minuuttia. Kuinka pitkä kaupunkien välinen matka on?
6. Laske $\frac{12^{997}}{8^{666} \cdot 9^{498}}$.

SARJA E

1. Sievennä.

a) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{490}}$

b) $\sqrt{300 - 75}$

c) $\sqrt{300} - \sqrt{75}$

2. Lammen vedestä vaihtuu vuorokaudessa 3,5 %. Kuinka monta prosenttia lampeen valuneesta ja veteen tasaisesti sekoittuneesta myrkystä on jäljellä 15 vuorokauden kuluttua?

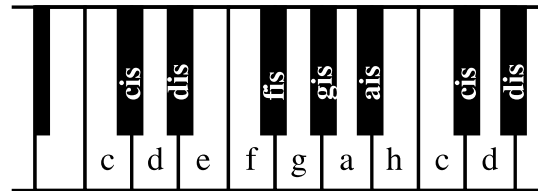
3. Kuinka monta prosenttia tulee sijoituskohteen vuodessa tuottaman koron olla, jotta viideksi vuodeksi tehdystä 15 000 euron sijoituksesta saataisiin 5 000 euron tuotto?

4. Ratkaise yhtälö $8 \cdot 16^{x-1} = 64^x$.

5. Laske $k^{\frac{2}{3}}$, kun $\frac{k^{\frac{1}{3}}}{k^{\frac{1}{2}}} = 7$.

6. Oktaavin nousu sävelkorkeudessa merkitsee sävelen taajuuden kaksinkertaistumista. Nykyisin vallitsevassa ns. tasavireisessä virityksessä oktaavi on jaettu kahteentoista (esimerkiksi c:stä alkaen c, cis, d jne.) puolisäveleen niin, että kahden peräkkäisen puolisävelen taajuuksien suhde, niin sanottu puolisävelaskel, on aina sama.

Kansainvälinen viritysstandardi määrää keski-a-sävelen taajuudeksi 440 Hz (värähdystä sekunnissa). Laske seuraavaksi korkeamman c-sävelen taajuus ja seuraavaksi matalamman dis-sävelen taajuus.



Vastaukset

Luonnolliset luvut ja kokonaisluvut

1. a) 1 856 (Yhteenlaskun vaihdantalain nojalla $917 + (856 + 83) = 917 + (83 + 856)$. Yhteenlaskun liitälain nojalla summa voidaan kirjoittaa ilman sulkeita ja ensiksi voidaan laskea kahden ensimmäisen luvun summa: $917 + (83 + 856) = 917 + 83 + 856 = 1\,000 + 856$.)
b) 76 000 (Kertolaskun vaihdantalain nojalla $4 \cdot 76 \cdot 250 = 76 \cdot 4 \cdot 250$. Kertolaskun liitälain nojalla mikä tahansa osatulo voidaan laskea ensimmäisenä, joten $76 \cdot 4 \cdot 250 = 76 \cdot 1\,000$.)
c) 1 050 (Osittelulain nojalla $25 \cdot 42 = 25 \cdot (40 + 2) = 25 \cdot 40 + 25 \cdot 2$.)
d) 7 690 (Osittelulain nojalla $769 \cdot 7 + 769 \cdot 3 = 769 \cdot (7 + 3)$.)
2. a) 11 b) -78 c) 0
(Koska $0 + 0 = 0$, niin luvun 0 vastaluku on 0.)
3. a) 6 b) 9
c) -9 (Luvun -9 vastaluvun vastaluku.)
4. a) $-5 + (-9)$ ja $3 + 11$
b) $3 - (-7)$ ja $-5 - 9$
5. a) 1 b) -14
c) 25 d) -101
6. a) -15 b) 40
c) -34 d) 19
7. a) -4 b) -3
c) -152 d) 4
8. a) $3a + 3b$ b) $5ab$
c) $4a + 4b$ d) $-4ab$
e) $-6ab$

9. a) Jos olisi $\frac{6}{0} = q$, niin olisi $6 = 0 \cdot q$ eli $6 = 0$, mikä on mahdotonta. Siis mikään luku q ei voi olla osamäärän arvo.
b) Jos olisi $\frac{0}{0} = q$, niin olisi $0 = 0 \cdot q$ eli $0 = 0$, mikä pätee kaikilla q :n arvoilla. Siis osamäärälle $\frac{0}{0}$ ei voida määritellä yksikäsitteistä arvoa.
10. a) 688 (Vaihdantalain nojalla yhteenlaskettavien järjestys voidaan vaihtaa:
 $-359 + 687 + 360 = -359 + 360 + 687$.
Liitälain nojalla mikä tahansa osasumma voidaan laskea ensiksi:
 $-359 + 360 + 687 = 1 + 687$.
b) 8 900 (Vaihdantalain nojalla tulon tekijöiden järjestys voidaan vaihtaa:
 $25 \cdot (89 \cdot 4) = 25 \cdot (4 \cdot 89)$.
Liitälain nojalla tulo voidaan kirjoittaa ilman sulkeita ja mikä tahansa osatulo voidaan laskea ensimmäisenä:
 $25 \cdot (4 \cdot 89) = 25 \cdot 4 \cdot 89 = 100 \cdot 89$.)
c) -4 500 (Osittelulain nojalla
 $45 \cdot (-79) + 45 \cdot (-21) = 45 \cdot (-79 - 21) = 45 \cdot (-100)$.)
d) 7 650 (Osittelulain nojalla
 $75 \cdot 102 = 75 \cdot (100 + 2) = 75 \cdot 100 + 75 \cdot 2 = 7\,500 + 150$.)
11. a) $x = -9$ b) $x = 0$
c) $x = -a + b$
12. $-5 - (-3) = -5 + 3 = 3 + (-5) = 3 - 5$
13. a) -21 b) -1 003
c) -100 d) 100
14. a) -7 b) 85
c) 10

15. a) $-a - b$ b) $a - b$
 c) $a + b$ d) $-ab$

16. a) $5x$ b) $-6x$
 c) $4x$ d) $-2x$

17. $-a - (-b)$
 a) 7 b) -12

18. a) esimerkiksi $a = -2$
 b) esimerkiksi $a = -2$
 c) Kun $a < 0$ eli kun a on negatiivinen.
 (Negatiivisen luvun vastaluku on positiivinen.)
 d) Kun $a < 0$ eli kun a on negatiivinen.
 (Negatiivisen luvun vastaluku on positiivinen ja siis suurempi kuin alkuperäinen luku.)
 e) Kun $a > 0$ eli kun a on positiivinen.
 (Positiivisen luvun vastaluku on negatiivinen ja siis pienempi kuin alkuperäinen luku.)
 f) Kun $a = 0$.

19. a) Esimerkiksi $3 \cdot 2 = 6$ ja $(-3) \cdot (-2) = 6$ eli ”kahden suuren luvun tulo on yhtä suuri kuin kahden pienen luvun tulo”.
 b) Kun vähentäjä on negatiivinen, niin vähenevä ei vähene.

Rationaaliluvut

20. a) esimerkiksi $\frac{-5}{1}$

b) esimerkiksi $\frac{217}{100}$

Murtolukumuotoja on rajaton määrä, sillä la-
 ventamalla saadaan aina uusi murtolukumuoto.

21. a) $-\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2} \left(\frac{-5}{6} + \frac{8}{6} \right)$ c) $\frac{4}{15}$
 d) $-\frac{21}{10} = -2\frac{1}{10}$ $\left(\frac{-20}{10} + \frac{6}{10} - \frac{7}{10} \right)$

22. a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{3}{8}$
 c) $-\frac{4}{7}$ $\left(\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{10}{7} \right) \right)$

23. a) $\frac{10}{13}$ b) $-\frac{19}{3} = -6\frac{1}{3}$

c) $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ d) $\frac{8}{9}$

24. a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{21}$

b) $\frac{4}{15} \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{9}$

c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{20}$

25. a) $\frac{1}{7} \cdot 100 = 100 \cdot \frac{1}{7}$

b) $\frac{1}{100} \cdot 13$ c) $\frac{1}{3}a$ d) $-\frac{1}{7}a$

26. a) $\frac{a}{4}$ b) $\frac{1}{4}a$

27. a) $-\frac{1}{4}$ b) $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

c) 5 d) $\frac{5}{11}$

28. a) $\frac{14}{15}$ b) $\frac{9}{25}$

c) $\frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$

29. a) $\frac{1}{50}$ b) $-\frac{1}{9}$

c) 32 d) 50

30. a) lauseke $-a \cdot \frac{1}{b}$, arvo 4

b) lauseke $\frac{1}{a} : (-b)$, arvo $\frac{4}{9}$

c) lauseke $(a + b) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$, arvo $-\frac{9}{4}$

31. a) $\frac{13}{24}$ b) $-\frac{10}{9} = -1\frac{1}{9}$

c) $\frac{1}{2}$ d) 2

32. a) 1 b) $\frac{1}{2}$
 c) $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ d) $-\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$
33. a) $-\frac{2}{5}$ b) 4
34. a) $\frac{5}{6} \cdot 10 = 8\frac{1}{3}$
 b) $\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{25} = \frac{2}{15}$
 c) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10} \cdot 24 = 6$
35. 800 g $(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot 1,8 \text{ kg})$
36. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$
 a) $\frac{3}{2}$ b) $-\frac{2}{5}$
37. a) $\frac{7}{4}$ (Luvun $\frac{4}{7}$ käänteisluku.)
 b) $-\frac{1}{9}$ c) $-7\frac{1}{2}$
38. a) $\frac{4}{25}$ b) -8 $(\frac{4}{3} : (-\frac{1}{6}))$
 c) $\frac{1}{3}$
39. a) $-\frac{13}{15}$ b) $\frac{4}{25}$
 c) 0 d) $-\frac{3}{2}$
40. a) $1000q = 675,675675\dots$
 $1000q - q = 675$
 $999q = 675$
 $q = \frac{675}{999} = \frac{25}{37}$
 b) Luvun $q = 0,675675\dots$ jakson pituus oli kolme, joten lukujen q ja $1000q$ jaksot ovat samalla kohdalla.

41. a) $\frac{7}{11}$
 b) 1 (Jos $q = 0,99\dots$, niin $10q - q = 9$. Yleisesti jokaisella päättyvällä desimaaliluvulla on myös päättymätön muoto, esimerkiksi $0,3 = 0,2999\dots$.)
 c) $\frac{5\,012}{999} = 5\frac{13}{999}$
 d) $\frac{3\,247}{990} = 3\frac{277}{990}$ (Jos $q = 3,27979\dots$, niin $1000q - 10q = 3247$.)
42. a) $\frac{1}{17} = 0,0588235294117647\dots$
 Jokaisessa jakolaskun vaiheessa lasketaan erotus, joka on jokin luvuista 1, 2, ..., 16. Ennen pitkää (viimeistään 17. kerralla) jonkin näistä luvuista on tultava toisen kerran.
 b) Lasketaan jakokulmassa osamäärän $\frac{m}{n}$ arvo. Jos jakolasku ei ole päättyvä, niin jokaisessa jakolaskun vaiheessa lasketaan erotus, joka on jokin luvuista 1, 2, ..., $n - 1$. Viimeistään n :nnellä kerralla jonkin näistä luvuista on tultava toisen kerran. Desimaalimuodolla on siis jaksot, jonka pituus on korkeintaan $n - 1$.
43. Luvuilla, jotka ovat jonkin luvun 10 potenssin (1, 10, 100, 1000 jne.) tekijöitä, eli luvuilla, jotka ovat lukujen 2 ja 5 potenssien tuloja. Murtoluvun $\frac{1}{n}$ desimaalimuoto on nimittäin päättyvä silloin, kun luku $\frac{1}{n}$ voidaan laventaa sellaiseksi murtoluvuksi, jonka nimittäjä on jokin luvun 10 potenssi.
 (Esimerkiksi päättyvä desimaalimuoto $\frac{1}{16} = 0,0625$ tarkoittaa, että $\frac{1}{16} = \frac{625}{10\,000}$, joten luku 16 on luvun 10 000 tekijä: $10\,000 = 625 \cdot 16$.)

44. a) Jakson pituus on kolme ja jakso alkaa heti pilkusta, jos n on luvun 999 tekijä, ei kuitenkaan 3 tai 9 (jolloin jakson pituus on yksi). Siis $n = 27, 37, 111, 333$ tai 999. Muut luvut joiden jakson pituus on kolme, saadaan kertomalla nämä luvut sellaisilla kokonaisluvuilla, joiden käänteisluvun desimaalimuoto on päättävä. Tällaiset luvut ovat muotoa $2^p \cdot 5^q$, missä p ja q ovat luonnollisia lukuja. (Katso edellinen tehtävä.)
 b) Luvut 101, 303, 909, 1 111 ja 9 999 sekä luvut, jotka saadaan näistä luvuista kertomalla luvulla $2^p \cdot 5^q$, missä p ja q ovat luonnollisia lukuja. (Luvun 9 999 tekijät, jotka eivät ole lukujen 99 tai 9 tekijöitä.)
 c) Luvut 41, 123, 271, 369, 813, 2 439, 11 111, 33 333 ja 99 999 sekä luvut, jotka saadaan näistä luvuista kertomalla luvulla $2^p \cdot 5^q$, missä p ja q ovat luonnollisia lukuja.

Ensimmäisen asteen yhtälö

45. Kun yhtälöön sijoitetaan luku 25, niin molempien puolien arvoksi tulee 330. Yhtälöä ei siis tarvitse ratkaista.
46. a) $x = -\frac{3}{20}$ b) $x = -\frac{1}{3}$
47. a) Yhtälöä ei toteuta mikään luku.
 b) $x = 0$
48. Yhtälö sievenee muotoon $0 = 0$ (tai esimerkiksi $18 = 18$), joten se on tosi kaikilla muuttujan x arvoilla.
49. $a = 10$ (Tulee olla $\frac{1}{2}a \cdot 6^2 - 5 \cdot 6 = 150$ eli $18a - 30 = 150$.)
50. 60 minuuttia (Jos x on puhelun pituus minuutteina, niin $8,2 + 1,52x = 100$.)
51. Elina 12, Eero 7, Kalle 24 (Jos x on Eeron myymien lehtien lukumäärä, niin $x + x + 5 + 2(x + 5) = 43$. Jos x on Elinan myymien lehtien määrä, niin $x - 5 + x + 2x = 43$.)
52. Kalle 95 euroa, Eero 167 euroa ja Elina 238 euroa (Yhtälöstä $200x + 350x + 500x = 500$ saadaan $x = \frac{500}{1\ 050}$. Osuudet ovat $200x$, $300x$ ja $500x$.)
53. a) $x = 32$ (Lavennetaan termien yhteiseksi nimittäjäksi luku 8 tai kerrotaan yhtälö suoraan luvulla 8. Nimittäjien poistamisen jälkeen yhtälö tulee muotoon $x + 2x + 4x + 8x = 480$.)
 b) $x = 12$
54. a) $x = -7$ b) $x = -\frac{1}{2}$
 (Yhtälö kirjoitetaan muotoon $\frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{1}$ ja kerrotaan ristiin. Voidaan myös kertoa lausekkeella $x + 1$.)
55. vanhin 21 ruukkua ja keskimäinen 14 ruukkua (Jos x on ruukkujen määrä, niin $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 7 = x$.)
56. 18,90 euroa (Jos x on alentamaton hinta euroina, niin $7(x - 5,40) = 5x$.)
57. 2,80 euroa (Jos x on vanha kilohinta euroina, niin $7,5(x + 0,80) = 10x + 1$. Jos x uusi kilohinta, niin $7,5x = 10(x - 0,80) + 1$.)
58. 340 km (Jos s on matka kilometreinä, niin $\frac{s}{80} - \frac{s}{85} = \frac{1}{4}$ tai $\frac{s}{80} - \frac{s}{85} = 0,25$. Koska matkan yksikkö on kilometri ja nopeuden km/h, aika 15 minuuttia on ilmaistava tunteina.)
59. a) $x = -5$ b) $x = -12$ c) $x = 0$
60. Yhtälö sievenee muotoon $0 = 3$ (tai esimerkiksi muotoon $1 = 4$), joten se on epätosi kaikilla muuttujan x arvoilla.
61. a) ei millään b) $r = 0$
62. A 11, B 9, C 18, D 13

63. ensimmäinen 3,90 euroa, toinen 6,20 euroa ja kolmas 12,90 euroa
(Osuuksia voidaan merkitä $7x$, $11x$ ja $23x$, joilloin $7x + 11x + 23x = 23$.)

64. 200 km

65. 39 kg (Jos x on paketin paino kilogrammoina, niin $15 + 0,40(x - 5) = 28,60$.)

66. a) $x = -\frac{1}{2}$

b) Yhtälön toteuttavat kaikki luvut.

67. a) $x = \frac{11}{12}$ b) $x = \frac{3}{2}$

68. Jaakko 66, Pentti 220 (Jos pähkinöiden määrä on x , niin $\frac{x}{5} + \frac{2x}{3} + 44 = x$.)

69. 28 euroa (Bussin vuokra voidaan tietojen perusteella ilmaista kahdella eri tavalla. Näin saadaan yhtälö.)

70. 1,04 euroa (Tuntemattomaksi voidaan valita joko vanha tai uusi hinta. Jos x on vanha hinta euroina, niin $55(x - 0,16) = 51x - 4$.)

71. a) $a = \frac{3}{4}$ b) $a = 2$

72. $a = -12$ (Ratkaistaan yhtälö $\frac{3}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3+a}{2+4}$

eli yhtälö $\frac{3}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3+a}{6}$. Nimittäjien poistamisen jälkeen yhtälö tulee muotoon $18 + 3a = 2(3 + a)$.)

73. 140 km (Jos s on matka kilometreinä, niin nykyinen keskinopeus (km/h) on $\frac{s}{2,75}$ ja uusi

$\frac{s}{2,5}$. Jälkimmäinen keskinopeus on 5 (km/h)

ensimmäistä pienempi. Saadun yhtälön juuri $s = 137,5$ (km) on pyöristetty. Toinen vaihtoehto on ratkaista ensin keskinopeus (uusi tai vanha) käyttämällä hyväksi tietoa, että matka (ajan ja keskinopeuden tulo) on koko ajan sama.)

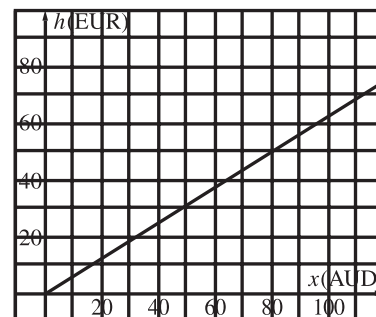
74. 10.54.33 (Valitaan tuntemattomaksi x kellonajasta 10 kulunut aika minuutteina. Kulmien, jotka minuutti- ja tuntiviisarit ovat kiertäneet pystyasennosta, tulee olla yhtä suuret. Esimerkiksi minuuttiviisari on kiertänyt pystyasennosta $\frac{x}{60} \cdot 360 = 6x$ astetta.)

Suoraan verrannollisuus

75. a) Ovat. b) Eivät ole. c) Ovat.
d) Eivät ole, sillä esimerkiksi kun neliön sivun pituus kaksinkertaistuu 1 cm:stä 2 cm:iin, niin neliön pinta-ala nelinkertaistuu 1 cm²:stä 4 cm²:iin.

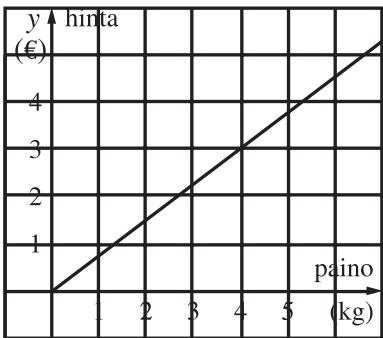
76. 530 g (Ratkaistaan verrantoyhtälö $\frac{200}{x} = \frac{3}{8}$ tai päätellään: yhteen annokseen tarvitaan $\frac{200}{3}$ g, joten kahdeksaan annokseen tarvitaan $8 \cdot \frac{200}{3}$ g.)

77. a) 12,44 euroa (Ratkaistaan verrantoyhtälö $\frac{150}{x} = \frac{240}{19,90}$ tai määritetään ensin yhden dollarin arvo $\frac{150}{240}$ euroa.)
b) $h = 0,625x$



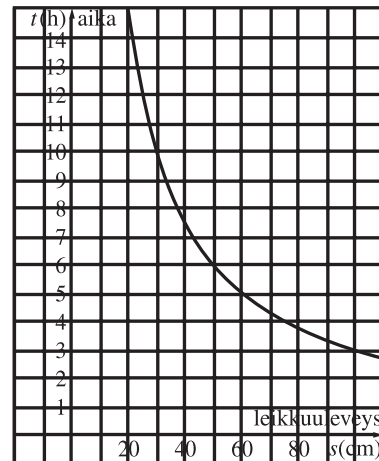
78. 1,55 m²

79. a) 12 m
b) $s = 0,0047v^2$, 4,2 m, 47 m, 110 m

80. 550 wattia (Tehontarve x saadaan verrantoyhtälöstä $\frac{1\,500}{x} = \frac{14^3}{10^3}$. Toinen tapa on määrittää verrannollisuuskertoimen: jos teho on P ja ilmamäärän tilavuus on V , niin $P = kV^3$. Sijoittamalla $P = 1\,500$ ja $V = 14$ saadaan $k = \frac{1\,500}{14^3}$.)
81. a) Suoraan verrannollinen säteen neliöön, verrannollisuuskertoimen on 4π .
b) Suoraan verrannollinen säteen kuutioon, verrannollisuuskertoimen on $\frac{4}{3}\pi$.
82. a) $y = 0,075x + 80$
b) 930 g c) 2,9 kg
83. 2,5 kupillista
84. 1 h 28 min
85. $y = 0,75x$
- 
86. 34 kW
87. 2 500 euroa
88. a) 4 000 W
b) $P = 2,29v^3$, 21 000 W
c) 140 W, 4 500 W
89. a) 72 m
(Pysähtymiseen tarvittavien matkojen erotus.)
b) 170 m
90. 280 yksikköön
(Jos y on verisuonen kuljettaman veren määrä, p verenpaine ja r suonen säde, niin $y = kpr^4$, missä k on verrannollisuuskertoimen.)

Kääntäen verrannollisuus

91. a) kääntäen verrannolliset
b) suoraan verrannolliset
c) Eivät suoraan eivätkä kääntäen verrannolliset, sillä jos esimerkiksi alentamaton hinta on 1 000 euroa ja tingitty alennus kaksinkertaistuu 100 eurosta 200 euroon, niin hinta pienenee 900 eurosta 800 euroon. Hinta ei siis puolitu eikä kaksinkertaistu.
d) kääntäen verrannolliset
92. 13 työpäivää (Verrantoyhtälö $\frac{x}{17} = \frac{9}{12}$.)
93. a) 4 tuntia b) $t = \frac{300}{s}$



(Koska aika t on kääntäen verrannollinen leikkauksen leveyteen s , niin $t = \frac{k}{s}$, missä k on verrannollisuuskertoimen. Yhtälöön sijoitetaan $t = 5$ ja $s = 60$ ja ratkaistaan k .)

94. 16 luksia, $v = \frac{101,4}{d^2}$
95. a) Pienenee 0,1225-kertaiseksi
(Määrästä a määrään $\left(\frac{5,6}{16}\right)^2 a$.)
b) $\frac{1}{60}$ s

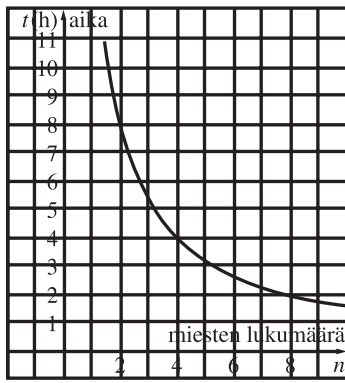
96. 80 km/h
(Koska matka on sama, nopeus ja aika ovat kääntäen verrannolliset. Jos x on nopeusrajoituksen mukainen aika, niin $\frac{x}{x+10} = \frac{40}{45}$.)

97. 10

98. a) 33 km/h b) 130 km/h

99. 50 minuuttia

100. a) 3 h 12 min b) $t = \frac{16}{n}$



101. 16,3 cm kielen päästä
102. 9,4 (Voimakkaampi sironta valokirjon violetissa päässä aiheuttaa ilmakehän sinisen värin. Vesimolekyylien ja pölyn aiheuttama sironta on eri aallonpituuksilla likimain yhtä suurta, mistä seuraa värittömämpi, harmaampi taivas.)
103. 69,9 kg
104. a) lähempänä olevaan 5,50 euroa, etäisempään 3,50 euroa (Jos x on lähempänä olevan asunnon etäisyyslisä, niin $\frac{x}{x-2} = \frac{22}{14}$.)
b) 25,50 euroa
105. a) 765 kg b) 24,5 cm
(Jos lankun leveys on l , paksuus p ja pituus s , niin lankun kantokyky on $y = \frac{klp^2}{s}$, missä k on verrannollisuuskerroin.)

Prosenttilaskennan kertaus ja täydennys

106. a) 0,36 b) 0,9 c) 0,09
d) 1 e) 0,0475 f) 1,15
g) 0,0035
107. lukioon 61 % ja ammatillisiin oppilaitoksiin 34 %
108. 0,21 %
109. 1 572,50 euroa
110. 32 000 tonnia (Koska tehtävän luvut on annettu kahden numeron tarkkuudella, myös vastaus pyöristetään kahden numeron tarkkuuteen.)
111. 8 870 (30,9 % äänioikeutettujen määrästä. Vastaus annetaan pyöristettynä kolmen numeron tarkkuuteen.)
112. 16 000 euroa (Talletuksen määrä x ratkaistaan yhtälöstä $0,045x = 720$.)
113. 1 620 kg (Tiivistemäärä x ratkaistaan yhtälöstä $0,185x = 300$.)
114. 2 340 000
115. a) 4,5 %
(Suolan massa on $0,06 \cdot 3 \text{ kg} = 0,18 \text{ kg}$. Lisäämisen jälkeen liuoksen massa on 4 kg.)
b) 27 %
(Suolan lisäämisen jälkeen suolaa on $0,12 \cdot 2 + 0,4 = 0,64$ (kg) ja liuosta 2,4 kg.)
c) 200 g, 6,7 %
116. 15,3 %
117. 4,6 %
118. 71 %
119. 29 %
120. a) 560 % b) 78,6 %
121. a) 62,1 % b) 38,3 %

122. b ja c

123. Kilogramman pakkauksessa 12 % alhaisempi. (350 gramman eli 0,35 kilogramman pakkauksen kilogrammahinnan voi laskea lyhyesti jakolaskulla: $\frac{2,19}{0,35}$)

124. a) Pieneni 1,5 prosenttiyksikköä.
b) 27 %

125. 36,5 %. Ei voida päätellä.

126. 7,7 %

127. -8,6 %
(Etumerkillä ilmaistaan virheen suunta.)

128. a) 1,25 b) 2,20
c) 0,75 d) 0,965

129. a) 391 € b) 3,68 jeniä
c) 104 senttiä
(Hinnat kerrotaan luvulla 1,15.)

130. a) 307,20 € b) 95,52 \$
c) 4,32 miljardia euroa
(Hinnat kerrotaan luvulla 0,96.)

131. a) 1 785 euroa ($1,2 \cdot 0,85 \cdot 1\,750$)
b) 3 331 euroa

132. a) 162 euroa b) 72 %

133. a) 340 euroa (yhtälö $1,15x = 391$)
b) 780 euroa (yhtälö $0,65x = 507$)

134. 73 senttiä (Perushinta x ratkaistaan yhtälöllä $1,08x = 9,90$.)

135. 1 420 ($1,04 \cdot 1,04 \cdot 1,04 \cdot 1\,260$)

136. a) 1,3a b) 1,012a c) 2,4a
d) 0,7a e) 0,988a

137. a) Kasvanut 8 %.
b) Kasvanut 40 %.
c) Kasvanut 220 %.
d) Vähentynyt 60 %.
e) Vähentynyt 5,6 %.

138. a) 78 % ($\frac{0,87b}{1,12b} = \frac{0,87}{1,12} \approx 0,78$)
b) 22 % c) 26 %

139. Laski 8 %. (Merkitään alkuperäistä hintaa esimerkiksi a . Korotuksen ja alennuksen jälkeen hinta on $0,8 \cdot 1,15a$.)

140. 22 % (Merkitään alkuperäistä rahamäärää esimerkiksi a . Supistunut rahamäärä oli $0,965 \cdot 0,935 \cdot 0,87a$.)

141. 14,5 % (Jos perushinta on a , niin myyntihinta on $1,17a$ ja arvonlisävero $0,17a$. Arvonlisäveron osuus myyntihinnasta on $\frac{0,17a}{1,17a}$.)

142. Aleni 2,2 %. (Jos edellisenä vuonna sellutonnien määrä oli a ja yhden tonnin hinta b , niin viennin arvo muuttui arvosta ab arvoon $1,182a \cdot 0,827b$.)

143. Kasvoivat 19 %.

144. a) Laskee 8,3 %. (Jos vanhan pullon hinta on a ja vetoisuus b litraa, niin vanha litrahinta on $\frac{a}{b}$ ja uusi $\frac{1,1a}{1,2b} = \frac{1,1}{1,2} \cdot \frac{a}{b}$.)
b) Nousee 13 %.

145. 67 % (Esimerkiksi näin: Jos hinta ennen korotusta oli a ja korotettu hinta ka , niin $0,6ka = a$, joten $k = \frac{1}{0,6} \approx 1,67$.)

Tai näin: Jos hinta ennen korotusta oli a ja korotettu hinta x , niin $0,6x = a$, joten

$$x = \frac{a}{0,6} \approx 1,67a.$$

Tai näin: Jos korotettu hinta on a , niin alkuperäinen hinta on $0,6a$ ja $\frac{a}{0,6a} = \frac{1}{0,6} \approx 1,67$.)

146. 10,7 %

147. 38 minuuttia (Merkitään vanhaa nopeutta esimerkiksi a . Olkoon x uusi matka-aika. Matka-aika ja nopeus ovat kääntäen verrannolliset, joten $\frac{x}{50} = \frac{a}{1,3a}$ ja $x = \frac{50}{1,3}$.)

- 148.** syksyllä ja keväällä kakkosmaalivahdin, koko kaudella ykkösmaalivahdin
- 149.** Voi ylittyä, imeytymis- ja palamisnopeudesta riippuen alkoholipitoisuus saattaa nousta aina 1,6 promilleen.
- 150.** 250 euroa (Yhtälö $0,6 \cdot 0,7x = 105$.)
- 151.** Einari 122 euroa ja Inka 158 euroa.
(Esimerkiksi näin: Jos Einarin osuus on x , niin $x + 1,3x = 280$. Tai näin: Jos Inkan osuus on x , niin $\frac{x}{280-x} = 1,3$.)
- 152.** 95,50 markkaa (Ratkaistaan ensin perushinta x yhtälöstä $1,12x = 99$.)
- 153.** 140 euroa (Yhtälö $0,6x = 1,2 \cdot 70$.)
- 154.** 2 668 euroa (Jotta nettopalkan ostovoima pysyisi ennallaan, myös nettopalkan tulee nousta 2,7 %. Uusi palkka saadaan yhtälöllä $0,66x = 1,027 \cdot 0,67 \cdot 2559$.)
- 155.** 13,3 % (Jos lainan suuruus on a , niin ensimmäisen vuoden korko on $0,0641a$ ja toisen vuoden korko $0,0726a$.)
- 156.** Kasvoi 12 %. (Jos päivittäistavaroiden myynnin arvo vuonna 2000 oli a , niin S-ryhmän myynti muuttui arvosta $0,290a$ arvoon $0,305 \cdot 1,066a$.)
- 157.** Pienenevät 32,5%. (Jos työvoiman suuruus on a ja palkka b , niin työvoimakulut muuttuvat arvosta ab arvoon $0,75a \cdot 0,9b$.)
- 158.** Kasvanut 21 %. (Jos edellisen vuoden liikevoitto on a ja työntekijöiden määrä b , niin liikevoitto työntekijää kohden on muuttunut arvosta $\frac{a}{b}$ arvoon $\frac{1,173a}{0,969b} = \frac{1,173a}{0,969b}$.)
- 159.** 11 % (Jos rahan määrä on a ja suklaan yksikköhinta b , niin rahalla saadun suklaan määrä muuttui määrästä $\frac{a}{b}$ määrään $\frac{a}{0,9b} = \frac{1}{0,9} \frac{a}{b}$. Voidaan käyttää myös verrannollisuutta: kun rahamäärä on sama, niin saatava määrä ja yksikköhinta ovat kääntäen verrannolliset.)
- 160.** 43 %
- 161.** a) 10 %
b)
- | | |
|----------------------------------|------|
| Energian tuotanto | 32 % |
| Teollisuus | 19 % |
| Liikenne | 18 % |
| Kotitaloudet, palvelut ym. | 11 % |
| Muu (esim. maatalous ja jätteet) | 20 % |
- (Jos päästöjen kokonaismäärä on a , niin vähennysten jälkeen päästöt ovat $0,80 \cdot 0,36a$, $0,85 \cdot 0,2a$, $0,163a$, $0,097a$ ja $0,18a$, yhteensä $0,898a$.)
- 162.** 6 kg (Yhtälö esimerkiksi $\frac{0,02 \cdot 3 + 0,08x}{3+x} = 0,06$, missä x on lisätyn liuoksen määrä.)
- 163.** 12% (Jos omenoiden massa alunperin on a , niin kuiva-aineen määrä on $0,3a$. Kuiva-aineen määrä on 90 % kuivattujen omenoiden massasta. Ratkaistaan kuivattujen omenoiden massa yhtälöllä $0,9x = 0,3a$ ja lasketaan, kuinka monta prosenttia sokerin määrä $0,04a$ on siitä.)
- 164.** 91 % (Jos turpeen määrä oli alussa a , niin veden määrä oli $0,9a$ ja muun aineen $0,1a$. Haihduttamisen jälkeen muun aineen määrä on 55 % kuivatusta turpeesta. Yhtälöstä $0,55x = 0,1a$ saadaan kuivatun turpeen määrä $x \approx 0,1818a$, joten veden määrä kuivatussa turpeessa on $0,0818a$.)

Potenssi

- 165.** 2 521,99 euroa
- 166.** 14 348 907 kerrosta
- 167.** a) 1,5 miljoonaa b) 250 miljoonaa
- 168.** 1 800 hirveä (Yhtälö $1,18^5 \cdot x = 4200$.)
- 169.** a) 256 b) 512
- 170.** $3,120 \cdot 10^{35}$, 36 numeroa
- 171.** a) $5,9 \cdot 10^9$ km
b) $1,50 \cdot 10^{11}$ m
c) 58 000 000 km
- 172.** Korkeus on $2,9000 \cdot 10^4$ jalkaa.
- 173.** 62 vuodeksi
- 174.** a) 2^{63} b) $3 \cdot 10^{11}$ tonnia
c) noin 500 vuoden
- 175.** 220 cm
- 176.** 5,6 cm
- 177.** noin 11 000 peuraa
- 178.** 3,2 miljoonaa euroa
- 179.** 39 ja 44 numeroa
- 180.** a) 4 b) 1 024
c) noin $5,5 \cdot 10^{11}$ eli noin 550 miljardia esivanhempaa
(Maapallon väkiluku 1000-luvun alussa oli noin 300 miljoonaa, joten tuolloin elänyt maapallon asukas on Sarin esivanhempi keskimäärin kahden tuhannen sukuhaaran kautta.)
- 181.** Aurinko $1\,409 \text{ kg/m}^3$, Maa $5\,516 \text{ kg/m}^3$
- 182.** a) $2,1 \cdot 10^{19}$ km
- 183.** a) $2,88 \cdot 10^{18}$ b) $1,598 \cdot 10^{127}$
c) $4,752 \cdot 10^{1203}$

- 184.** a) $4,5 \cdot 10^{15}$ b) $6,04 \cdot 10^{102}$
c) $1,12 \cdot 10^{1005}$

- 185.** a) 22 000 000 hehkulampun
b) 2,64 PWh

- 186.** Kyllä edellyttäen, että ketju ei missään vaiheessa katkea. Ansio 7 812,40 dollaria.

- 187.** a) 285 311 670 611
b) $2^4\,194\,304$

Lukujärjestelmät

- 188.** a) 24, 11000, 44 ja 30
b) 365, 101101101, 2 430 ja 555

- 189.** a) $18 \cdot (1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^1)$
b) 2 410

- 190.** a) 18 ja 16D ($24 = 1 \cdot 16^1 + 8$ ja $365 = 1 \cdot 16^2 + 6 \cdot 16^1 + 13$)
b) 7D0 c) 41 682

- 191.** a)
- | | | | | |
|---|---|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 4 | 11 | 13 |
| 3 | 3 | 11 | 14 | 22 |
| 4 | 4 | 13 | 22 | 31 |
- b)
- | | |
|---|---|
| | 1 |
| 1 | 1 |

- 192.** a) 10 b) 11
c) 10001110 d) 100011110

- 193.** a) 47
b) quatre-vingt-sept
c) quatre-vingt-douze

- 194.** Esimerkiksi ajan ja kulman yksiköissä on säilynyt (babylonialaisten käyttämä) 60-järjestelmä. Kuukausien ja vuorokauden tuntien lukumäärät viittaavat 12-järjestelmään. Kymmenjärjestelmä on kätevä, koska sormia voidaan käyttää laskemisen apuna. Tämä onkin syy, miksi kymmenjärjestelmä on tullut vallitsevaksi. Kaksijärjestelmässä laskeminen olisi helpoa (katso esimerkiksi tehtävän 191 kertotaulua), mutta luvut ovat pitkiä. 12-järjestelmällä on vieläkin kannattajia, sillä luvulla 12 on paljon tekijöitä, mikä yksinkertaistaa murtolukulaskuja.

Potenssilausekkeet

- 195.** Nimitykset johtuvat siitä, että a^2 on neliön pinta-ala ja a^3 kuution tilavuus, kun neliön sivu ja kuution särmä on a .
- a) $6^2 = 36$ b) $-6^2 = -36$
 c) $(-6)^2 = 36$ d) $-(-6)^2 = -36$
 e) $(-6)^3 = -216$ f) $-6^3 = -216$
 g) $-(-6)^3 = 216$
- 196.** a) -2004 b) 1 c) -1
- 197.** a) 4 b) -34 c) 16
 d) 64 e) -14 f) -225
- 198.** a) 5 b) -15
- 199.** a) x^6 b) a^3 c) $\frac{1}{x^4}$
 d) $\frac{1}{x^5}$ e) a^3
- 200.** a) $6a \cdot 6a = 36a^2$
 b) $\frac{2}{a} \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{2}{a} = \frac{8}{a^3}$
 c) $3aa \cdot 5aaaa = 15a^6$
 d) $\frac{x}{xxxx} = \frac{1}{x^3}$
 e) $xx \cdot xx \cdot xx \cdot xx \cdot xx = x^{10}$
- 201.** a) $\frac{8}{5}$ b) $\frac{8}{125}$ c) $3\frac{1}{16}$
- 202.** a) $-243x^5$ b) x^{10}
 c) $\frac{x^7}{128}$ d) $\frac{16x^4}{81}$
- 203.** a) 81-kertaistuu.
 (Luku a^4 kasvaa luvuksi $(3a)^4$.)
 b) Pienenee yhteen 16.-osaan.
 (Luku a^4 pienenee luvuksi $\left(\frac{a}{2}\right)^4$.)
- 204.** a) 1 000 b) 49
- 205.** a) b^{13} b) x^4 c) x^{20}
- 206.** a) 390 625
 ($15\,625 \cdot 25 = 5^6 \cdot 5^2 = 5^8 = 390\,625$)
 b) 625 c) 1 953 125
- 207.** a) $120r^3$ b) $-625r^6$ c) $16r^7$
- 208.** a) $5x^{12}$ b) $\frac{8x^8}{3}$ c) $\frac{2x^2}{9}$
- 209.** $1,80 \cdot 10^{1004}$
- 210.** a) 2^9 b) 2^{25}
 c) 2^{32} d) 2^5
- 211.** Koska $7^{2000} = 7^2 \cdot 1000 = (7^2)^{1000} = 49^{1000}$,
 niin $7^{2000} < 50^{1000}$.
- 212.** a) $50 \cdot (2^{1001} \cdot 5^{1002} \cdot 0,1^{1000})$
 $= 2 \cdot 5^2 \cdot 2^{1000} \cdot 5^{1000} \cdot 0,1^{1000}$
 $= 50 \cdot (2 \cdot 5 \cdot 0,1)^{1000}$
 b) 64 ($8 = 2^3$)
 c) 125
- 213.** a) Megatavu on 2^{20} eli 1 048 576 tavua.
 Gigatavu on 2^{30} eli 1 073 741 824 tavua.
 b) noin 350 000-kertaiseksi
- 214.** a) 1 b) 13
 c) -5 d) 72

215. a) $\frac{4}{9}$ b) $-\frac{3}{4}$
216. a) 1 250 b) 10 000 c) -6 000
217. a) $\frac{8}{49}$ b) $\frac{2}{49}$ c) $\frac{512}{49}$
218. a) $(-3a)^2 = 9a^2$
 b) $-3a^2$, ei sievene.
 c) $\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{8}$
219. a) $-64a^3$ b) $\frac{16x^4}{81}$ c) $-\frac{1}{125x^3}$
220. a) Kasvaa 120 %.
 (Jos x on suureen t muuttunut arvo, niin
 $\frac{x}{t} = \frac{(1,3r)^3}{r^3}$. Voidaan myös käyttää yhtälöä
 $t = kr^3$, missä k on verrannollisuuskertoimen.)
 b) Pienenee 41 %.
221. a) 1 000 000 b) $\frac{1}{64}$
222. a) $9x^8$ b) $-125x^7$ c) $5x^4$
223. a) x^7y^3 b) x^5 c) $-x^9y^7$
224. a) $-a^8$ b) a^6
 c) $-a^{10}$ d) $-a^{10}$
225. a) $1,9 \cdot 10^{1029}$ b) $2,6 \cdot 10^{996}$
226. a) 2^{22} b) 2^{70}
 c) 2^{15} d) 2^{50}
227. a) 10 000 (Käytetään havaintoa $100 = 10^2$.)
 b) 100
228. Kun luvut 4 ja 8 ilmaistaan luvun 2 potensseina ja käytetään potenssikaavoja, saadaan
 $\frac{2^n 4^{n+5}}{8^{n+1}} = 2^7$. Lausekkeen arvo ei siis riipu luvusta n .

229. a) x^{2n} b) x^{2n-2}
 c) x d) $\frac{x^n}{2}$
230. 3^{3000}
231. $4,44 \cdot 10^{1267}$, 1 268 numeroa
 (Lasketaan vaikkapa
 $7^{1500} = (7^{15})^{100} \approx (4,74756 \cdot 10^{12})^{100}$.)
232. googol = 10^{100}
 a) googol b) 200
 c) 1 000 d) 100 googol = 10^{102}
 e) $\text{googol}^2 = 10^{200}$
 f) $100 \text{ googolplex} = 10^{\text{googol} + 2} = 10^{10^{100} + 2}$
 g) $\text{googol} \cdot \text{googolplex} = 10^{\text{googol} + 100} = 10^{10^{100} + 100}$
 h) Ei ole.
233. 1 281 numeroa, luku alkaa 190...
 (Perustele ensin, miksi luvussa on $2^{4253} - 1$ on yhtä monta numeroa ja samat ensimmäiset numerot kuin luvussa 2^{4253} . Luvun 2^{4253} likiarvo voidaan laskea vaiheittain, esimerkiksi
 $2^{4253} = (2^{100})^{40} \cdot 2^{253}$.)

Negatiivinen eksponentti ja eksponentti nolla

234. a) 1 b) $\frac{1}{36}$
 c) $\frac{1}{32}$ d) $\frac{1}{3}$
235. a) $\frac{1}{81}$
 b) $-\frac{1}{81}$ (potenssin 3^{-4} vastaluku)
 c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{50}$
236. a) $\frac{1}{x^4}$ b) $\frac{5}{x}$
 c) 3 d) $\frac{5}{4x^2}$

237. a) $\frac{7}{4}$ b) $\frac{125}{27}$ c) $\frac{9}{16}$

238. a) $2^{-4} \text{ m}^2 = 0,0625 \text{ m}^2$ b) 2^{-n} m^2

239. a) 1 b) 0,1
c) 0,001 d) 600,05003

240. a) 0,000 024 b) 0,008 100 2

241. a) $3,2 \cdot 10^{-5}$ b) $5,12 \cdot 10^{-9}$

242. a) 0,000 229 b) 0,000 003 11

243. 5 700-kertainen

244. 1 900-kertainen

245. a) 1 b) -1
c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{625}$

246. a) 1 b) $\frac{1}{343}$
c) $\frac{1}{7^{11}}$ d) $\frac{1}{7^{13}}$

247. $\frac{5}{9}$

248. a) 1 b) $\frac{4}{x^2}$
c) $\frac{1}{64x^3}$ d) $\frac{1}{10x^2}$

249. Kohtien b ja d lausekkeet.

250. a) 50 b) 10

251. a) 2^0 b) 2^{-1} c) 2^{-3}
d) 2^{-31} e) 2^{-7}

252. a) 4 250 b) 266 c) $8\,500 \cdot 2^{-n}$

253. a) 70003,1005
b) $5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-3}$

254. a) 0,000 000 026 0
b) $3,2 \cdot 10^{-5}$, $9,01 \cdot 10^{-1}$

255. $1,30 \cdot 10^{-77}$, 76 nollaa

256. Vastaus riippuu painostasi.

257. a) 100 μg b) 250 nm

258. a) $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ g} = 0,000\,015 \text{ g}$
b) $3,34 \cdot 10^{-11} \text{ s} = 0,000\,000\,000\,033\,4 \text{ s}$

259. 5 g
(Suomella ja Ruotsilla on erikoislupa myydä liikaa dioksiinia sisältävää silakkaa ja lohta.)

260. a) $(ab)^{-8} = \frac{1}{(ab)^8} = \frac{1}{a^8 b^8} = \frac{1}{a^8} \cdot \frac{1}{b^8} = a^{-8} b^{-8}$
b) $a^{-19} \cdot a^{23} = \frac{1}{a^{19}} \cdot a^{23} = \frac{a^{23}}{a^{19}} = a^{23-19} = a^{-19+23}$

c) $(a^3)^{-4} = \frac{1}{(a^3)^4} = \frac{1}{a^{3 \cdot 4}} = \frac{1}{a^{12}} = a^{-12}$

261. a) $3,83 \cdot 10^{-2429}$
 $(7,30 \cdot 10^{-98})^{25} = 7,30^{25} \cdot (10^{-98})^{25}$
b) $7,59 \cdot 10^{-1205}$ (Lasketaan vaiheittain esimerkiksi $0,5^{4000} = (0,5^{200})^{20}$.)

Neliöjuuri

262. a) $\sqrt{81} = 9$ b) $\sqrt{121} = 11$ c) $\sqrt{17}$

263. a) $-\sqrt{25} = -5$ b) $\sqrt{16+9} = 5$
c) $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 7$

264. a) 0 b) 1 c) $\sqrt{10}$
d) Ei määritelty. e) -10

265. a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{4}$

266. a) 7 b) $\frac{7}{13}$ c) π

267. a) 41
b) 29 (Luvun $20^2 + 21^2 = 841$ neliöjuuri.)
c) 1 d) 11

268. a) 17 b) $\frac{1}{13}$ c) $\frac{1}{7}$

269. a) 63 b) $-5\sqrt{5}$ c) $320\sqrt{5}$

270. a) 1,6 m (Vastaus annetaan samalla kahden numero tarkkuudella kuin neliön pinta-ala.)
b) 5,0 m c) 16 m

271. a) 8,2 h (Verranto $\frac{t}{6,5} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7,5}}$. Toinen tapa on määrittää ensin riippuvuutta kuvaavan yhtälön $t = k\sqrt{m}$ verrannollisuuskerroin sijoittamalla $t = 6,5$ ja $m = 7,5$.)
b) 9,2 h

272. a) 49
b) Ei minkään, sillä luvun neliöjuuri on aina epänegatiivinen.
c) 625 d) 25

273. a) 17 b) 13 c) $\sqrt{11}$ d) $\sqrt{10}$
e) Kun a on positiivinen tai 0 ($a \geq 0$).
f) Kun a on negatiivinen tai 0 ($a \leq 0$).

274. a) 6 b) $\sqrt{37}$
c) -7 d) Ei määritelty.

275. a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{25}{8}$

276. a) 10 b) 14 c) 5
d) -1 e) Ei määritelty.

277. a) 25 b) 312 c) 313

278. a) 6 b) 10 c) 490
d) $10\sqrt{10}$ e) $-3430\sqrt{10}$

279. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{3\sqrt{6}}$

280. a) 16 b) 289
c) Ei minkään, sillä neliöjuuri on aina epänegatiivinen.
d) Ei minkään. e) $(\pi - 2)^2$

281. 14 km

282. pituus ja leveys noin 6,1 m

283. a) 312 m/s b) 349 m/s

284. a) 1 200 b) 4 700

285. a) 1, 16, 81, 256 ja 625
b) 1, 256, 6 561, 65 536 ja 390 625

286. a) $3^5 = 243$
b) 3^{413} , sillä $(3^{413})^2 = 3^{413 \cdot 2}$.

287. a) Kokonaisluvun neliön viimeinen numero on sama kuin luvun viimeisen numeron neliön viimeinen numero. Lukujen 0, 1, ..., 9 neliöistä mikään ei pääty numeroon 2.
b) 3, 7 ja 8

Neliöjuurilla laskeminen

288. a) $\sqrt{21}$ b) 6 c) 9

289. a) $\sqrt{7}$ ($\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{14}{2}}$)
b) 7 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

290. a) $2\sqrt{3}$ ($12 = 4 \cdot 3$)
b) $5\sqrt{2}$ ($50 = 25 \cdot 2$)
c) $10\sqrt{5}$ ($500 = 100 \cdot 5$)

291. a) 17,3 b) 54,8 c) 173

292. a) $\sqrt{5}$ ($45 = 9 \cdot 5$)
b) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ ($40 = 4 \cdot 10$)
c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ($80 = 16 \cdot 5$)

293. a) $2\sqrt{5} + \sqrt{15}$ b) $6 - 3\sqrt{6}$

294. a) $-4\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$

295. a) $3\sqrt{5}$ b) 5
c) $\sqrt{3}$ d) 3

296. Kaava ei pidä paikkaansa. Keksi esimerkki.

297. $45\sqrt{2} - 62$

298. $7\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

299. $\sqrt{32} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ ja
 $\sqrt{18} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
 Siis $\sqrt{32} + \sqrt{2} = \sqrt{18} + \sqrt{8}$.
 (Vasemman ja oikean puolen laskimella laskettujen likiarvojen vertaaminen ei kelpaa perusteluksi, sillä likiarvojen yhtäsuuruudesta ei seuraa, että luvut ovat täsmälleen yhtä suuret.)

300. a) 10 b) $\frac{1}{\sqrt{14}}$ c) $\frac{1}{4}$

301. tulo 10 ja osamäärä 5

302. a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{5}$
c) $3\sqrt{5}$ d) $5\sqrt{3}$

303. a) 6,4 b) 32 c) 1,6

304. a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{6}$

305. a) $-18 + 4\sqrt{30}$ b) $60\sqrt{3} - 105 + 6\sqrt{35}$

306. a) $\sqrt{2} - 1$ b) $18\sqrt{3} - 11$

307. a) $\sqrt{2}$ b) $6\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$

308. a) $-2\sqrt{3} + 7\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{5} + \sqrt{2}$

309. a) Kumpikin puoli sievenee muotoon $5\sqrt{10}$.
 b) Kumpikin puoli sievenee muotoon $3\sqrt{3}$.
 (Vasemman ja oikean puolen laskimella laskettujen likiarvojen vertaaminen ei kelpaa perusteluksi, sillä likiarvojen yhtäsuuruudesta ei seuraa, että luvut ovat täsmälleen yhtä suuret.)

310. a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
d) $\sqrt{15}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

311. $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, sillä $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Muodosta $\frac{1}{\sqrt{2}}$ päästään muotoon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ laimentamalla luvulla $\sqrt{2}$. Vastaavat muodot ovat $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ja $\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

312. a) $2,2 \cdot 10^{513}$
b) $9,5 \cdot 10^{513}$ ($9,0 \cdot 10^{1027} = 90 \cdot 10^{1026}$)

313. Luvun $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ neliö on $\frac{a}{b}$, sillä

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Luku $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ on epänegatiivinen, koska se on

kahden epänegatiivisen luvun osamäärä.

Siis luku $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ täyttää luvun $\frac{a}{b}$ neliöjuurelta vaaditut ehdot.

314. Ensimmäinen kaava pätee, kun $a \geq 0$, ja toinen kaava, kun $a \leq 0$.

- 315.** Ensimmäinen epäyhtälö pätee, kun a on suurempi kuin 1 ($a > 1$). Toinen epäyhtälö pätee, kun a on 0:n ja 1:n välissä ($0 < a < 1$). Perustellaan esimerkiksi seuraavasti:

Kun $\sqrt{a}$ kerrotaan itsellään, tulos on a .

Kun ykköstä suurempi luku kerrotaan itsellään, saadaan suurempi luku, ja kun 0:n ja 1:n välissä oleva luku kerrotaan itsellään, saadaan pienempi luku.

Neliöyhtälö

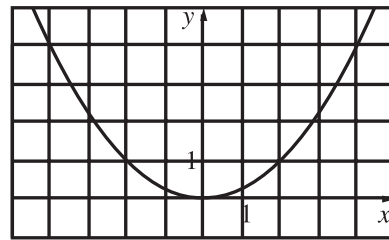
- 316.** a) $x = 1$ tai $x = -1$
 b) $x = \sqrt{6}$ tai $x = -\sqrt{6}$
 c) $x = \sqrt{13}$ tai $x = -\sqrt{13}$
 d) Ei juuria.
- 317.** a) $x = 0$ b) $x = 2\sqrt{5}$ tai $x = -2\sqrt{5}$
 c) $x = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ tai

$$x = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (x^2 = \frac{1}{5})$$
- 318.** a) 178 km b) 201 km
- 319.** a) 2,8 ja -2,8 b) -1,7
- 320.** 73 km/h (Yhtälö $\frac{x^2}{50^2} = \frac{60}{28}$.)
- 321.** 1,7 metrin etäisyydellä ja lähempänä
- 322.** 4,5 % (Olkoon k luku, jolla pääoma tulee kerrotuksi, kun siihen lisätään korko. Tällöin $k^2 \cdot 4\,000 = 4\,368,10$.)
- 323.** a) $x = \sqrt{5}$ tai $x = -\sqrt{5}$
 b) $x = 5$ tai $x = -5$
 c) $x = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ tai $x = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
- 324.** a) $x = 0$ b) $x = 3\sqrt{2}$ tai $x = -3\sqrt{2}$
 c) $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ tai $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

- 325.** 15 m

- 326.** a)

x	$y = x^2$	(x, y)
-4	4	(-4, 4)
-3	2,25	(-3; 2,25)
-2	1	(-2, 1)
-1	0,25	(-1; 0,25)
0	0	(0, 0)
1	0,25	(1; 0,25)
2	1	(2, 1)
3	2,25	(3; 2,25)
4	4	(4, 4)



- b) 3,5 ja -3,5

- 327.** a) 100 kg b) 1,55 metrin pituisen

- 328.** 57,6 kg

- 329.** 11,3 km ($\frac{x^2}{6\,370^2} = \frac{85,1}{84,8}$, missä x on lentokoneen etäisyys maapallon keskipisteestä.)

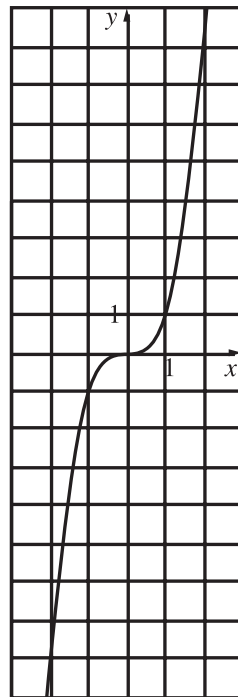
- 330.** 29,4

- 331.** a) 60 km/h (Jos jarrutusmatka nopeudesta 80 km/h on s , niin jarrutusmatka nopeudesta 100 km/h on $1,5625s$. Ratkaistaan, mistä nopeudesta jarrutusmatka on $0,5625s$.)
 b) 89 km/h (Todellisuudessa jarrutus alkaa sitä lähempänä perävaunua, mitä suurempi nopeus on, koska reaktioaikana kuljettu matka pitenee, kun ajonopeus suurenee. Törmäysnopeudet olisivat olleet laskettuja suurempia.)

Potenssifunktiot ja korkeammat juuret

332.

x	$y = x^3$
-2	-8
-1,5	-3,375
-1	-1
-0,5	-0,125
0	0
0,5	0,125
1	1
1,5	3,375
2	8



333. a) pariton

b) parillinen

334. a) 3

b) $\sqrt[7]{-600} \approx -2,49$ c) $\sqrt[8]{5} \approx 1,22$

d) 0

e) Ei määritelty.

335. 150 s ($\frac{x}{50} = \frac{\sqrt[4]{5 \cdot 200}}{\sqrt[4]{70}}$, missä x on norsun verenkiertoaika.)

336. a) $\sqrt[8]{6561} = 3$, $x = 3$ tai $x = -3$ b) $\sqrt[5]{7776} = 6$, $x = 6$ 337. a) $x = 7$ tai $x = -7$ b) $x = \sqrt[5]{21} \approx 1,84$ c) $x = \sqrt[7]{-5} \approx -1,26$ d) $x = \sqrt[6]{2} \approx 1,12$ tai $x = -\sqrt[6]{2} \approx -1,12$ 338. särmä 12,6 cm (1 l = 1 dm³)

339. 10,5 m/s

340. 4,9 %

341. a) 1,5 %

b) 8,3 miljardia (Laskussa kannattaa käyttää laskimeen jätettyä yhtälön $k^{12} \cdot 5 = 6$ juuren likiarvoa.)

342. 7,18 % (Ratkaistaan yhtälö $k^{10}a = 2a$, missä a on alkuperäinen pääoma. Vakio a jaetaan heti pois.)

343. a) 4,5 %

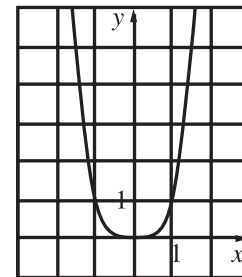
b) 62 %

344. 5,4 %

345. 21 %

346.

x	$y = x^4$
-1,5	5,0625
-1	1
-0,5	0,0625
0	0
0,5	0,0625
1	1
1,5	5,0625

347. a) $\sqrt[4]{81} = 3$ b) $-\sqrt[4]{81} = -3$ c) $\sqrt[3]{125} = 5$ d) $\sqrt[3]{-125} = -5$

348. 29 % (Alkuperäisen ja jäljelle jääneen lajimäärän suhde on yhtä suuri kuin pinta-alojen 1 200 ja 300 neljänsien juurien suhde.)

349. a) $x = \sqrt[6]{3} \approx 1,20$ tai $x = -\sqrt[6]{3} \approx -1,20$ b) $x = \sqrt[4]{\frac{1}{6}} \approx 0,639$ tai $x = -\sqrt[4]{\frac{1}{6}} \approx -0,639$ c) $x = \sqrt[7]{5} \approx 1,26$

d) Ei juuria.

e) $x = \sqrt[5]{-8} \approx -1,52$ 350. a) $x = 4$ tai $x = -4$ b) $x = 5$

351. särmä 5,2 km

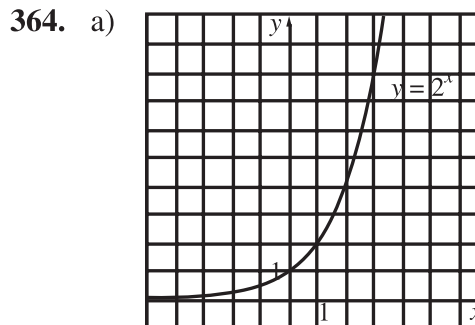
352. 91 cm

353. $4,51 \cdot 10^8$ km

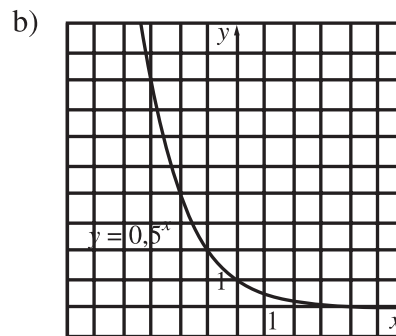
- 354.** Pienenevät 0,70-kertaisiksi.
(Yhtälö $k^6 a = 0,12a$, missä a on kuvion alkuperäinen mitta. Vakio a jaetaan heti pois.)
- 355.** a) 2,3 % b) 22 000
- 356.** 6,9 %
- 357.** 20-kertaiseksi
- 358.** a) On ratkaistu k yhtälöstä $k^{10}p = 2,4p$, missä p on palkka, ja saatu $k \approx 1,091$.
Kun 140 % :n kasvu jaetaan tasaisesti jokaiselle kymmenelle vuodelle niin, että kasvu on joka vuosi yhtä monta prosenttia, vuosikasvu on 9,1 %. Kyse on siis keskimääräisestä (tasan jaetusta) kasvusta.
b) 6,7 %
- 359.** 6,1 % (Yhtälöllä $k^5 a = 1,012 \cdot \dots \cdot 1,091a$ ratkaistaan, kuinka suuri tasainen hintojennousu olisi viidessä vuodessa johtanut samaan kokonaisuuteen.)
- 360.** a) geometrinen keskiarvo $\sqrt[4]{120} \approx 3,31$, aritmeettinen keskiarvo 3,5
Geometrinen keskiarvo on pienempi.
b) $x = \sqrt{ab}$ eli x on lukujen a ja b keski-
verto.
(Nimitys keskiverto tulee juuri siitä, että se toteuttaa yhtälön $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ eli on ”keskellä” verrannossa, jonka ”laidoilla” ovat a ja b .)
- 361.** a) 14 %
b) n . vuodelta 1500 ennen ajanlaskun alkua
(Kokeilua helpottaa, kun laskimella laskettu vuosittainen vähenemiskerroin tallennetaan laskimen muistipaikkaan.)

Eksponenttifunktio

- 362.** a) 0,177 b) 4 c) 0,5
- 363.** funktio $7,9^x \cdot 7500$
a) 10 miljoonaa b) 43



Kun muuttujan x arvot suurenevat, myös funktion 2^x arvot suurenevat.



Kun muuttujan x arvot suurenevat, funktion $0,5^x$ arvot pienenevät.

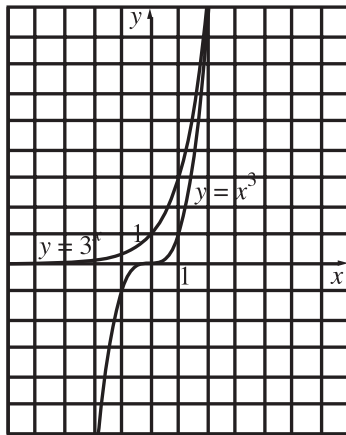
- 365.** Funktion 1^x arvo jokaisella muuttujan x arvolla on 1. Kuvaaja on pisteen $(0, 1)$ kautta kulkeva x -akselin suuntainen suora.
- 366.** a) $0,977^x \cdot 3,28$
b) 2,31 kg c) 3,40 kg
- 367.** a) 200 b) 16 000
- 368.** a) 53 g $(0,53^{\frac{45}{60}} \cdot 85 \text{ g})$
b) 140 g

369. a) 13 % b) 38 %
(Yhtälöstä $k^5 a = 0,5a$, missä a on aineen määrä alussa, nähdään, että määrä tulee joka tunti 0,8706-kertaiseksi.)

370. a) 99 miljoonaa euroa
b) 16 ja 9,3 miljoonaa euroa

371. funktio $3^x \cdot 250$
a) 12 kg b) 16 g
c) 400 g d) 170 g

372.



373. a) 17 % b) 1,8 mg
c) 480 mg
374. a) Kantaluku k on nollan ja ykkösen välissä ($0 < k < 1$).
b) $k > 1$
375. a) 31 %
(Lasketaan ensin, kuinka monta prosenttia valosta läpäisee lasin. Jos lasiin tulevan valon määrä on a , niin x senttimetrin paksuisen lasin läpi menevä valon määrä on $0,75^x a$.)
b) 11 %
376. 1,2 miljoonaa (Yhtälö $0,15^{2,7} x = 7\,000$.)
377. funktio $10 + 0,5625^x \cdot 80$
a) 29 °C b) 14,5 °C c) 10 °C
378. Tulee suuremmaksi. Ensimmäinen kokonaislukuarvo on $x = 36$.

379. Ensimmäinen muuttujan x kokonaislukuarvo, jolla $1,1^x$ on suurempi kuin x^{12} , on $x = 850$. Yleisesti, jos k on mikä tahansa ykköistä suurempi luku ja n mikä tahansa kokonaisluku, niin ennen pitkää eksponenttifunktion k^x arvot tulevat potenssifunktion x^n arvoja suuremmiksi. Siis eksponentiaalinen kasvu voittaa aina pidemmän päälle minkä tahansa potenssifunktion kasvun.

380. $9^{\frac{1}{2}} = 3$ ja $25^{\frac{1}{2}} = 5$, eli potenssien arvot ovat kantaluvun neliöjuuria. Vastaavasti olisi $49^{\frac{1}{2}} = 7$, kuten laskimen mukaan onkin. Tämä voidaan perustella potenssin potenssin kaavalla olettaen, että kaava pätee, kun eksponentti on murtoluku: $\left(49^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 49^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 49^1 = 49$.

Vastaavasti potenssien $8^{\frac{1}{3}}$ ja $1000^{\frac{1}{3}}$ arvot ovat kantaluvun kuutiojuuria: $8^{\frac{1}{3}} = 2$ ja $1000^{\frac{1}{3}} = 10$, mikä perustellaan samaan tapaan korottamalla potenssiin 3.

Murtopotenssi

381. a) $\sqrt{11}$ b) $\sqrt[3]{3}$
382. a) $6^{\frac{1}{2}}$ b) $6^{\frac{1}{3}}$ c) $6^{\frac{1}{12}}$
383. a) $\sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
c) $\frac{1}{\sqrt{10^3}} = \frac{1}{\sqrt{1000}}$ d) $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
384. a) $10^{\frac{1}{2}}$ b) $10^{\frac{13}{2}}$
c) 10^6 d) $10^{\frac{3}{2}}$

385. a) $5^{-\frac{1}{2}}$ b) $5^{-\frac{1}{3}}$ c) $5^{-\frac{2}{3}}$

386. a) $x^{\frac{1}{2}}$ b) $x^{\frac{5}{2}}$ ($x^2 x^{\frac{1}{2}} = x^{2+\frac{1}{2}}$)
c) $x^{\frac{7}{2}}$ ($x^3 x^{\frac{1}{2}}$)

387. a) $3^{-\frac{1}{2}}$ ($\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}$)
b) 3^{-1}
c) $3^{-\frac{3}{2}}$ ($\frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3^1 3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3^{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}$)
d) 3^{-2} e) $3^{-\frac{5}{2}}$

388. a) $\sqrt{5}$ ($\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5^1}{5^{\frac{1}{2}}}$. Käytetään samankantais-
ten potenssien osamäärän kaavaa.)

b) $\sqrt{5}$ ($(\sqrt[4]{5})^2 = \left(5^{\frac{1}{4}}\right)^2$. Käytetään potens-
sin potenssin kaavaa.)

c) $\sqrt{5}$ ($\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{6}}$. Käytetään saman-
kantaisten potenssien tulon kaavaa.)
d) $\sqrt[3]{5}$

389. a) $x \approx 1,72$ b) $x \approx 1,88$ ($15^{\frac{1}{4,3}}$)

390. 37 %
(Ratkaistaan k yhtälöstä $k^{1,5} \cdot 5,2 = 2,6$.)

391. 66 % (Ratkaistaan k yhtälöstä $k^{2,7} a = 0,32a$,
missä a on levyyn tulevan valon määrä.)

392. a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\frac{1}{\sqrt{10}}$
c) $\sqrt[3]{49}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{49}}$

393. a) $2^{\frac{1}{2}}$ b) $2^{\frac{1}{3}}$ c) $2^{-\frac{1}{3}}$
d) $2^{\frac{4}{3}}$ e) $2^{-\frac{2}{3}}$

394. a) $5^{\frac{3}{2}}$ b) $5^{\frac{3}{2}}$ c) 5^0
d) $5^{-\frac{1}{2}}$ e) 5^{-1} f) 5^{-2}
g) $5^{-\frac{5}{2}}$

395. a) $a^{-\frac{1}{2}}$ b) a^{-1} c) $a^{-\frac{3}{2}}$
d) a^{-3} e) $a^{-\frac{7}{2}}$

396. a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{3}$ c) $\sqrt[6]{3}$

397. a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$

398. a) $x \approx 0,526$ b) $x \approx 2,35$ c) $x = 169$

399. 17,3 % (Vähennemiskerroin k ratkaistaan
yhtälöstä $k^{3,66} a = 0,5a$.)

400. 2,4-kertaiseksi

401. a) $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$ ja $(-8)^{\frac{2}{6}} = 2$. Potenssien ar-
vot eivät ole yhtä suuret.
b) Esimerkiksi $(-3)^1 = -3$ ja murtopotenssin
määritelmän mukaan laskettuna $(-3)^{\frac{2}{2}} = 3$.

402. Osoitetaan, että kun luku $(\sqrt[n]{a})^m$ korotetaan
potenssiin n , tulokseksi tulee a^m . Siis luku
 $(\sqrt[n]{a})^m$ on luvun a^m n . juuri $\sqrt[n]{a^m}$.

403. Tulee olla $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[pn]{a^{pm}}$. Käyttämällä po-
tenssikaavoja ja n . juuren määritelmää potens-
si $(\sqrt[n]{a^m})^{pn}$ sievenee muotoon a^{pm} . Siis luku
 $\sqrt[n]{a^m}$ on luvun a^{pm} pn . juuri, eli
 $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[pn]{a^{pm}}$.

Eksponentin ratkaiseminen**404.** 4 vuoden kuluttua(Yhtälö $2^x \cdot 1\,500 = 24\,000$ eli $2^x = 16$.)**405.** a) $x \approx 2,6$ Tarkistus: $2^{2,6} \approx 6,06$ ja $2^{2,55} \approx 5,86$, joten juuri on lukujen 2,55 ja 2,6 välissä.b) $x \approx 0,7$ Tarkistus: $2^{0,7} \approx 1,62$ ja $2^{0,65} \approx 1,57$, joten juuri on lukujen 0,65 ja 0,7 välissä.**406.** a) $x = 3$ b) $x = 1$ c) $x = 0$
d) $x = -1$ e) $x = -2$ **407.** a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = \frac{1}{4}$ **408.** a) $x = 3$ ($5^x = 125$)
b) $x = -1$ ($2^{3x} = \frac{1}{8}$)
c) $x = 3$ **409.** a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = 2$ **410.** $x \approx 5,2$
(Systemaattisella kokeilulla huomataan, että juuri on lukujen 5,15 ja 5,2 välissä.)**411.** 18 vuodessa
(Olkoon a nykyinen kulutus. Ratkaistaan systemaattisella kokeilulla yhtälö $1,04^x a = 2a$.)**412.** 14 vuodessa
(Olkoon a loukkaantuneiden nykyinen määrä. Ratkaistaan systemaattisella kokeilulla yhtälö $0,95^x a = 0,5a$ eli $0,95^x = 0,5$.)**413.** a) $x \approx 1,6$
Tarkistus: $3^{1,6} \approx 5,8$ ja $3^{1,65} \approx 6,1$, joten juuri on lukujen 1,6 ja 1,65 välissä.
b) $x \approx 0,6$
Tarkistus: $3^{0,6} \approx 1,9$ ja $3^{0,65} \approx 2,04$, joten juuri on lukujen 0,6 ja 0,65 välissä.**414.** a) $x = 5$ b) $x = 0$ c) $x = -3$
d) $x = -4$ e) Ei ratkaisua.**415.** a) $x = \frac{3}{5}$ b) $x = \frac{3}{2}$ **416.** a) $x = \frac{2}{3}$ b) $x = \frac{3}{2}$ **417.** a) $x = -\frac{1}{2}$ b) $x = \frac{3}{2}$ c) $x = \frac{1}{4}$ **418.** a) $x = 3$ b) $x = -2$ ($9^{x-1} = 27^x$)
c) $x = \frac{3}{5}$ **419.** a) $x = 5$ b) $x = 2$ **420.** 23 vuodessa (Olkoon sijoitetun pääoman suuruus a . Ratkaistaan systemaattisella kokeilulla yhtälö $1,05^x a = 3a$.)**421.** 30 vuodessa
(Olkoon aineen määrä nyt a , jolloin turvallinen määrä on $0,5a$. Ratkaistaan systemaattisella kokeilulla yhtälö $0,977^x a = 0,5a$.)**422.** a) $x \approx 8,97$ b) $x \approx 458$ **423.** 2,5 vuorokauden kuluttua
(Merkitään bakteerien B määrää b , jolloin bakteerien A määrä on $32b$. Ratkaistaan yhtälö $2^x \cdot 32b = 8^x b$ eli $2^x \cdot 32 = 8^x$. Kumpikin puoli voidaan ilmaista luvun 2 potensseina.)**424.** $x = 2$
(Yhtälö voidaan saattaa muotoon $3^x = 9$.)**425.** a) $x \approx 2,58$
(Yhtälö voidaan saattaa muotoon $2^x = 6$.)
b) $x \approx 2,32$

Kertaustehtäviä

426. a) $15 - 5a$ b) $15a$
 c) $-15 - 5a$ d) $-15a$

427. $\frac{2}{3}$

$$\left(\frac{2}{7}\left(1\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right)\right) = \frac{2}{7}\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{6}\right) = \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{3}$$

428. $\frac{3}{7}$

$$\left((-1 + \frac{2}{5}) : (-1 - \frac{2}{5})\right) = -\frac{3}{5} : (-\frac{7}{5}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7}$$

429. $\frac{5}{3}$ $\left(\frac{5}{12} + \frac{5}{4}\right)$

430. a) $x = -9$ b) $x = 0$

431. a) $x = -60$ (Lavennetaan termien nimittäjiksi luku 12 tai kerrotaan suoraan luvulla 12. Nimittäjien poistamisen jälkeen yhtälö on $6x + 4x + 3x + 60 = 12x$.)
 b) Ei juuria. (Nimittäjien poistamisen jälkeen yhtälö on $4x - x = 3x + 6$.)

432. a) $x = -6$ (Yhtälö kerrotaan ristiin tai yhtälön molemmat puolet kerrotaan luvulla 28.)
 b) $x = -\frac{5}{9}$ (Yhtälö kerrotaan lausekkeella $4x + 2$ tai saatetaan ensin muotoon $\frac{3x+1}{4x+2} = \frac{3}{1}$ ja kerrotaan ristiin.)

433. $a = -6$
 (Tulee olla $\frac{a \cdot 3}{6} + \frac{3}{3} = \frac{a}{3}$ eli $\frac{a}{2} + 1 = \frac{a}{3}$.)

434. Kalle 83 euroa, Eero 12 euroa ja Elina 25 euroa (Olkoon yksi jako-osuus x . Tällöin $107x + 15x + 32x = 120$, josta $x = \frac{120}{154}$.
 Osuudet ovat $107 \cdot \frac{120}{154}$ jne.)

435. 60 kalaa (Yhtälö $\frac{3x}{4} + \frac{x}{5} + 3 = x$, missä x on päivän kalansaalis.)

436. 21 cm (Jos x on raitojen väli senttimetreinä, niin $12 \cdot 8 + 11 \cdot x = 325$.)

437. 10,5 tuntia
 (Lukuaika ja luettujen sivujen määrä ovat suoraan verrannolliset, joten $\frac{x}{3,5} = \frac{420}{140}$, missä x on loppuosan lukemiseen kuluva aika.)

438. noin 4 minuuttia (Aurusaika ja auran leveys ovat kääntäen verrannolliset, joten $\frac{x}{25} = \frac{125}{150}$, missä x on uusi aurusaika.)

439. 8 tuntia (Talkooväen määrä ja niittoaika ovat kääntäen verrannolliset, joten $\frac{x}{12} = \frac{a}{1,5a}$, missä a on talkooväen määrä viime vuonna ja x on kysytty aika.)

440. a) 47 000 euroa
 (verrantoyhtälö $\frac{x}{300} = \frac{50^2}{4^2}$)
 b) $h = 18,75m^2$, missä h on timantin arvo euroina ja m timantin massa karaatteina.
 (Yhtälö on muotoa $h = km^2$, missä k on verrannollisuuskerroin. Koska $300 = k \cdot 4^2$, niin $k = 18,75$. Yhtälö voidaan myös muodostaa aluksi ja ratkaista sen avulla a -kohta.)

441. a) Riittää, sillä valaistus on 2 200 luksia.
 (Yhtälö $\frac{x}{300} = \frac{5,4^2}{2,0^2}$.)
 b) $v = \frac{8748}{s^2}$, missä v on valaistus lukseina ja s on valonlähteen etäisyys metreinä
 (Yhtälö on muotoa $v = \frac{k}{s^2}$, missä k on verrannollisuuskerroin. Koska $300 = \frac{k}{5,4^2}$, niin $k = 300 \cdot 5,4^2$. Yhtälö voidaan myös muodostaa aluksi ja ratkaista sen avulla a -kohta.)

442. 58 euroa ($1,04^{54} \cdot 7$)

443. 15 000 ($0,35^4 \cdot 1\,000\,000$, Yhden suodattimen läpi pääsee 35 % hiukkasista, joten jokainen suodatin tekee hiukkasten määrän 0,35-kertaiseksi.)

444. 1 508 euroa (Yhtälö $1,05^{20} \cdot x = 4\,000$)

445. a) lauseke $-a^2 + a^3$, arvo 18
 $(-3^2 + 3^3 = -9 + 27)$
 b) lauseke $(-a)^2 + a^3$, arvo 36
 $((-3)^2 + 3^3 = 9 + 27)$

446. a) $-125x^3$
 b) $\frac{16}{x^3}$ ($x \cdot \frac{16}{x^4}$)
 c) $-a^8$ ($-a^2 \cdot a^6$)
 d) $3a^9$ ($\frac{27a^{12}}{9a^3}$)

447. a) $30s^2$ ($36s^2 - 6s^2$)
 b) $-216s^4$ ($36s^2(-6s^2)$)
 c) $-42s^2$ ($-6s^2 - 36s^2$)

448. a) $\frac{1}{216}$ ($\frac{1}{6^3}$)
 b) $\frac{1}{81}$ ($(\frac{1}{3})^4$)
 c) $\frac{1}{2401}$ ($7 \cdot (\frac{1}{7})^5 = \frac{1}{7^4}$)

449. a) 5^{51} ($125^{17} = (5^3)^{17}$)
 b) 5^{15} ($5 \cdot 25^7 = 5 \cdot (5^2)^7$)
 c) 5^{15} ($\frac{125^{11}}{25^9} = \frac{(5^3)^{11}}{(5^2)^9}$)

450. $6,25 \cdot 10^{1204}$ (Muuttujan arvo sijoitetaan sievennettyyn lausekkeeseen $256x^6$. Saadaan $256 \cdot (2,5 \cdot 10^{200})^6$
 $= 256 \cdot 2,5^6 \cdot (10^{200})^6 = 62\,500 \cdot 10^{1200}$.)

451. luku $2^{10\,000}$ on suurempi
 $(2^{10\,000} = (2^{10})^{1000} = 1024^{1000}$ ja
 $10^{3\,000} = (10^3)^{1000} = 1000^{1000})$

452. a) 1 b) $\frac{1}{7}$
 c) $\frac{1}{343}$ d) $\frac{9}{49}$

453. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{36}$
 c) $\frac{1}{216}$ d) $\frac{1}{1296}$

454. a) $\frac{3}{x}$ ($3x \cdot \frac{1}{x^2}$)
 b) $-\frac{x^2}{9}$ ($-x^4 \cdot \frac{1}{(-3x)^2} = -x^4 \cdot \frac{1}{9x^2}$)
 c) $\frac{3}{x^2}$ ($-3 \cdot \frac{1}{x^4} \cdot (-x^2)$)

455. a) 380 000 000
 b) 0,000 071 2

456. a) $8,00 \cdot 10^{10}$
 b) $8,10 \cdot 10^{-6}$

457. 28 numeroa, 2 ensimmäistä 1 ja 5
 $(3^{57} \approx 1,57 \cdot 10^{27})$

458. 0,27 s

459. $6,0 \cdot 10^{23}$ ($\frac{238}{4,0 \cdot 10^{-22}}$)

460. a) 13 b) 169
 c) 120 d) Ei määritelty.

461. a) 7 b) 11

462. a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{29}{35}$ ($\sqrt{\frac{841}{1225}}$)

463. a) 625
 b) Ei minkään.
 (Luvun neliöjuuri on aina epänegatiivinen.)

464. a) 3 b) 48 c) $5\sqrt{5}$
 d) $250\sqrt{2}$
 (Puretaan tuloksi: $(5\sqrt{2})^3 = 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}$
 $= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 125 \cdot 2\sqrt{2}$,
 tai käytetään tulon potenssin kaavaa
 $(5\sqrt{2})^3 = 5^3 \cdot (\sqrt{2})^3$.)

465. a) 160 km (1 ha = 0,01 km², joten
 2 500 000 ha = 25 000 km².)
 b) 180 km (Ympyrän säde kilometreinä on
 yhtälön $\pi r^2 = 25\,000$ positiivinen juuri
 $r = \sqrt{\frac{25\,000}{\pi}}$.)

466. a) $x = \sqrt{5}$ tai $x = -\sqrt{5}$
 b) Ei juuria.

467. 16 karaatin timantin
 (Yhtälö $\frac{x^2}{4^2} = \frac{5000}{300}$.)

468. a) 15 ($\sqrt{3 \cdot 75}$)
 b) $6\sqrt{5}$ ($\sqrt{6 \cdot 30} = \sqrt{36 \cdot 5}$)

469. a) $\frac{1}{6}$ ($\sqrt{\frac{1}{36}}$)
 b) $2\sqrt{3}$ ($\sqrt{\frac{60}{5}} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3}$)

470. a) $5\sqrt{5}$ ($\sqrt{125} = \sqrt{25 \cdot 5}$)
 b) $25\sqrt{2}$ ($\sqrt{1250} = \sqrt{625 \cdot 2}$, voidaan
 myös sieventää vaiheittain
 $\sqrt{1250} = 5\sqrt{50} = 5 \cdot 5\sqrt{2}$.)

471. a) $6 - 3\sqrt{2}$ b) $-\sqrt{5}$

472. a) $3\sqrt{2}$ ($\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$)
 b) $\sqrt{3}$ ($3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$)

473. a) 7 b) 3
 c) -1 d) Ei määritelty.

474. a) $x = 4$ tai $x = -4$
 b) Ei juuria. c) $x = -16$

475. 2,8 %
 (Keskimääräistä kasvua vastaava kasvuker-
 roin saadaan yhtälöllä $k^8 \cdot 12\,000 = 15\,000$.)

476. a) $\sqrt{5}$ b) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ c) $\sqrt[3]{9}$

477. a) $7^{\frac{1}{2}}$ b) $7^{-\frac{1}{3}}$

478. a) $k^{\frac{7}{2}}$ ($k^3 \sqrt{k} = k^3 k^{\frac{1}{2}} = k^{3+\frac{1}{2}}$)
 b) $k^{-\frac{7}{2}}$

479. a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ ($\frac{7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{6}}}{7^1} = 7^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1} = 7^{-\frac{1}{2}}$)
 b) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ ($\frac{3^{\frac{1}{6}}}{(3^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{6}}}{3^{\frac{2}{3}}} = 3^{\frac{1}{6} - \frac{2}{3}} = 3^{-\frac{1}{2}}$)

480. a) 70,1 ($17^{\frac{3}{2}}$)
 b) 0,433 ($4,9^{-\frac{1}{1,9}}$)

481. 15,2 % (Vähennemiskerroin saadaan yhtälöstä
 $k^{4,20}a = 0,5a$, missä a on määrä alussa.
 Yhtälön juuri on $k = 0,5^{\frac{1}{4,20}}$.)

482. a) 17 % b) 48 %
 (Jos x on lasin paksuus senttimetreinä ja a la-
 siin tulevan lämpösäteilyn määrä, niin läpi me-
 nevän lämpösäteilyn määrä on $0,77^x a$.)

- 483.** a) 1,5 % (Kasvukerroin k ratkaistaan yhtälöstä $k^{24} \cdot 4,5 = 6,4$.)
 b) $1,0148^x \cdot 4,5$
 c) 8,1 miljardia, 1,4 miljardia
 (Laskettiin b-kohdan funktion arvot muuttujan arvoilla $x = 40$ ja $x = -80$. Maapallon todellinen väkiluku vuonna 1900 oli 1,6 miljardia.)
- 484.** a) 40 g b) 21 g
 (Massa x vuorokauden kuluttua on $3,0^x \cdot 25,3$. Laskettiin funktion arvot muuttujan arvoilla $x = \frac{10}{24}$ ja $x = -\frac{4}{24}$.)
- 485.** a) $x = 0$
 b) $x = \frac{2}{3}$ ($((2^3)^x = 2^2$ eli $2^{3x} = 2^2$)
 c) $x = -\frac{2}{3}$ ($2^3 \cdot 2^{3x} = 2$ eli $2^{3+3x} = 2^1$)

486. $x = -\frac{1}{2}$ ($2^1 \cdot 2^{4x} = 2^{2x}$ eli $2^{1+4x} = 2^{2x}$)

487. a) $x = \frac{3}{2}$ b) $x = -\frac{5}{2}$

- 488.** $x \approx 34$
 (Käytetään systemaattista kokeilua. Funktion $0,98^x$ arvot pienenevät muuttujan x arvojen suuretessa. Havaitaan, että arvo $0,98^{34}$ on suurempi kuin 0,5 ja arvo $0,98^{34,5}$ on pienempi kuin 0,5, joten juuri on lukujen 34 ja 34,5 välissä.)

- 489.** 12 vuoden kuluttua
 (Ratkaistaan systemaattisella kokeilulla yhtälö $1,12^x \cdot 250 = 1\,000$ eli yhtälö $1,12^x = 4$. Funktion $1,12^x$ arvot suurenevat muuttujan x arvojen suuretessa. Koska $1,12^{12} \approx 3,90$ on pienempi kuin 4 ja $1,12^{12,5} \approx 4,12$ on suurempi kuin 4, yhtälön juuri on lukujen 12 ja 12,5 välissä.)

TEHTÄVÄSARJOJA

Sarja A

1. Pienenee 6,3 %.
(Jos suorakulmion pituus on a ja leveys b , niin pinta-ala on ab . Uusi pinta-ala on $1,25a \cdot 0,75b = 0,9375ab$.)
2. 225 euroa
(Jos alkuperäinen maksu henkeä kohden oli x , niin $15x = 18(x - 2,5)$.)
3. $33\sqrt{2} + 87 - ((3\sqrt{2})^3 + 5(3\sqrt{2})^2 - 7 \cdot 3\sqrt{2} - 3) = 54\sqrt{2} + 90 - 21\sqrt{2} - 3$
4. 10 metrin päässä $(\frac{80}{300} = \frac{5^2}{x^2})$
5. 63 % (Yhtälöstä $k^{29}a = 0,5a$, missä a on isotoopin määrä alussa, saadaan vähenemiskerroin $k = 0,97638\dots$. 19 vuoden kuluttua määrä on $k^{19}a$.)
6. Käytetään murtopotensseja. $d = (abc)^{\frac{1}{3}}$, joten lukujen a, b, c ja d geometrinen keskiarvo on

$$\left(abc(abc)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left((abc)^1(abc)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left((abc)^{1+\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left((abc)^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = (abc)^{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}}$$

$$= (abc)^{\frac{1}{3}} = d.$$

Sarja B

1. 5,8 cm
(1 dl = 0,1 l = 0,1 dm³. Jos x on särmän pituus desimetreinä, niin $x^3 = 0,2$.)
2. Laura 325 euroa ja Pekka 260 euroa
(Lauran palkkion suuruus x saadaan esimerkiksi yhtälöllä $0,8x + x = 585$ tai $\frac{585-x}{x} = 0,8$.)

3. luvun 1 000 $(\sqrt{10} + \sqrt{40} + \sqrt{90} + \sqrt{160}) = \sqrt{10} + 2\sqrt{10} + 3\sqrt{10} + 4\sqrt{10} = 10\sqrt{10}$ ja $(10\sqrt{10})^2 = 1\,000$. Suorituksesi ei riitä, että lasketaan laskimella sieventämättömien neliöjuurien summa ja korotetaan neliöön, sillä laskin antaa vain likimääräisiä tuloksia. Sen sijaan tulos kannattaa ensin löytää tai lopuksi tarkistaa laskimella.)
4. 730 m³ (Joka vuosi puumäärä tulee kerrotuksi ensin luvulla 1,06 (kasvu) ja sitten luvulla 0,955 (hakkuut). Vuonna 2018 kasvukauden alkaessa puumäärä on $(0,955 \cdot 1,06)^{20} \cdot 12\,000$ ja kasvukauden päättyttyä $1,06 \cdot (0,955 \cdot 1,06)^{20} \cdot 12\,000$, joten hakkuiden suuruus on $0,045 \cdot 1,06 \cdot (0,955 \cdot 1,06)^{20} \cdot 12\,000$.)
5. $\sqrt{5}$ (Sijoitetaan lausekkeeseen $a = 5^{\frac{1}{6}}$:

$$2 \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} - \left(5^{\frac{1}{6}}\right)^3 = 2 \cdot 5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} - 5^{\frac{1}{6} \cdot 3}$$

$$= 2 \cdot 5^{\frac{1}{2}} - 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$
)
6. 625 grammaa (Suurin mahdollinen määrä 75-prosenttista kultaa saadaan, kun jompikumpi kul-
taerä käytetään kokonaan seokseen.
Vaihtoehto 1. Ratkaistaan, kuinka paljon 60-prosenttista kultaa on lisättävä 400 grammaan 85-prosenttista kultaa, jotta saataisiin 75-prosenttista kultaa. Lisättävälle määrälle x (g) saadaan yhtälö $0,85 \cdot 400 + 0,6 \cdot x = 0,75(400 + x)$, josta $x \approx 267$ (g). Käytettävissä oleva 60-prosenttisen kullan määrä ei riitä, joten kyseeseen tulee toinen vaihtoehto.
Vaihtoehto 2. Ratkaistaan, kuinka paljon 85-prosenttista kultaa on lisättävä 250 grammaan 60-prosenttista kultaa, jotta saataisiin 75-prosenttista kultaa. Lisättävälle määrälle x (g) saadaan yhtälö $0,6 \cdot 250 + 0,85 \cdot x = 0,75(250 + x)$, josta $x = 375$ (g).)

Sarja C

- $x = -\frac{12}{13}$
(Nimittäjien poistamisen jälkeen saadaan yhtälö $9x + 2x = 24x + 12$.)
- 13 % (Olkoon tiivisteen määrä a . Saatava me-
humäärä oli ennen $\frac{a}{0,26}$ ja nyt $\frac{a}{0,23}$. Uuden
määrän suhde vanhaan on
 $\frac{a}{0,23} : \frac{a}{0,26} = \frac{a}{0,23} \cdot \frac{0,26}{a} = \frac{0,26}{0,23} \approx 1,13$.)
- 7 % pienempi
(Jos liikenteen suuruus vuonna 1994 oli a , niin
vuonna 2004 liikenne oli $1,4a$ ja vuonna 2014
 $0,96^{10} \cdot 1,4a \approx 0,93a$.)
- 11 % lyhyempi, tulisi alentaa 29 %
(Olkoon s jarrutusmatka nopeudesta v .
Jos x on jarrutusmatka nopeudesta $0,75v$, niin
 $\frac{x}{s} = \frac{(0,75v)^2}{v^2}$, joten $x = 0,5625s$. Koska
 $\frac{0,5s}{0,5625s} \approx 0,89$, puolittunut jarrutusmatka on
 $100\% - 89\% = 11\%$ todellista lyhyempi.
Jos y on nopeus, jolla jarrutusmatka on $0,5s$,
niin $\frac{0,5s}{s} = \frac{y^2}{v^2}$, joten $y \approx 0,71v$.)
- Lausekkeen arvo on aina $5^5 = 3\,125$, sillä
 $\frac{5^{n+1}25^{n+2}}{125^n} = \frac{5^{n+1}(5^2)^{n+2}}{(5^3)^n} = \frac{5^{n+1}5^{2n+4}}{5^{3n}} = 5^{n+1+2n+4-3n} = 5^5$.
- 17 °C
(Juoman ja ilman lämpötilan välinen lämpötilaero
tulee joka tunti kerrotuksi samalla luvulla k . En-
simmäisen pullon lämpötilaero pieneni neljässä
tunnissa on 23 °C:sta 6 °C:een. Siis $k^4 \cdot 23 = 6$,
josta $k = \sqrt[4]{\frac{6}{23}} \approx 0,715$. Toisen pullon lämpötila-
ero on $k^{2,5} \cdot 23$.)

Sarja D

- 4,87 euroa
(Arvonlisäveroton hinta ratkaistaan yhtälöllä
 $1,22x = 27$.)
- a) 35,6 %
(Jos hinta alussa oli a , niin ajanjakson lopussa
hintaa oli
 $0,948 \cdot 0,869 \cdot 0,880 \cdot 0,928 \cdot 0,957 a \approx 0,644a$.)
b) 8,4 %
(Jos hinta tulee joka vuosi k -kertaiseksi, niin
 $k^5 a \approx 0,644a$, josta $k \approx 0,916$.)
- 325 cm
(Jos yhdellä 123 cm:n lavalla saatava teho on a ,
niin tarvitaan lapa, jonka teho on $7a$. Lavan pi-
tuus saadaan verrantoyhtälöstä $\frac{x^2}{123^2} = \frac{7a}{a}$ eli
 $\frac{x^2}{123^2} = 7$.)
- 121,7 %
(Jos kuution A särmä on a ja kuution B särmä on
 b , niin $6a^2 = 1,7 \cdot 6b^2$. Siis $a^2 = 1,7b^2$, joten
 $a = \sqrt{1,7}b$ ja $a^3 = (\sqrt{1,7})^3 b^3 \approx 2,217b^3$.)
- 310 km
(Jos s on matka (km), niin keskinopeus nyt on
 $\frac{s}{2,1}$ (km/h) ja uusi keskinopeus $\frac{s}{1,85}$ (km/h).
Saadaan yhtälö $\frac{s}{1,85} - \frac{s}{2,1} = 20$. Kun poistetaan
nimittäjät, yhtälö tulee muotoon
 $2,1s - 1,85s = 20 \cdot 1,85 \cdot 2,1$, josta $s = 310,8$.
Voidaan myös ensin ratkaista alkuperäinen keski-
nopeus v (km/h): Matkaan käytetty aika on
kääntäen verrannollinen keskinopeuteen, joten
 $\frac{v}{v+20} = \frac{1,85}{2,1}$. Yhtälöstä saadaan $v = 148$.
Matka on ajan ja keskinopeuden tulo
 $2,1 \cdot 148 = 310,8$ (km).)
- $\frac{3}{16}$ ($\frac{12^{997}}{8^{666} \cdot 9^{498}} = \frac{(2^2 \cdot 3)^{997}}{(2^3)^{666} \cdot (3^2)^{498}} = \frac{2^{2 \cdot 997} \cdot 3^{997}}{2^{3 \cdot 666} \cdot 3^{2 \cdot 498}} = \frac{2^{1994} \cdot 3^{997}}{2^{1998} \cdot 3^{996}} = \frac{3}{16}$.)

Sarja E

1. a) $\frac{1}{7} \left(\sqrt{\frac{10}{490}} \right)$
 b) $15 \left(\sqrt{225} \right)$
 c) $5\sqrt{3} \left(\sqrt{100 \cdot 3} - \sqrt{25 \cdot 3} = 10\sqrt{3} - 5\sqrt{3} \right)$
2. 59 % (Jos lampeen valuneen myrkyn määrä on a , niin 15 vuorokauden kuluttua määrä on $0,965^{15}a \approx 0,586a$.)
3. 5,92 % (Korkokerroin k ratkaistaan yhtälöstä $k^5 \cdot 15\,000 = 20\,000$.)
4. $x = -\frac{1}{2}$ (Ilmaistaan molemmat puolet luvun 2 potensseina.
 $2^3 \cdot (2^4)^x - 1 = (2^6)^x$ ja edelleen $2^3 + 4(x-1) = 2^{6x}$,
 jolloin saadaan yhtälö $3 + 4(x-1) = 6x$.)
5. $\frac{1}{2401}$
 (Koska $\frac{k^{\frac{1}{3}}}{k^{\frac{1}{2}}} = k^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = k^{-\frac{1}{6}}$, niin $k = 7^{-6}$ ja
 $k^{\frac{2}{3}} = (7^{-6})^{\frac{2}{3}} = 7^{-6 \cdot \frac{2}{3}} = 7^{-4} = \frac{1}{7^4}$.)
6. c-sävel 523,3 Hz ja dis-sävel 311,1 Hz
 (Jos k on peräkkäisten sävelten taajuuksien suhde (puolisävelaskel), niin $k^{12} = 2$, joten
 $k = \sqrt[12]{2} \approx 1,05946$. Seuraavaksi korkeamman c-sävelen taajuus on $k^3 \cdot 440$ Hz ja seuraavaksi matalamman dis-sävelen taajuus on $k^{-6} \cdot 440$ Hz.)

Hakemisto

alkuluku	69	kuutiojuuri	113
eksponentiaalinen muutos	22	kymmenjärjestelmä	71
eksponentti	64	kymmenpotenssimuoto	
eksponenttifunktio		positiivinen eksponentti	65
määritelmä	122	etuliitteet	70
kuvaaja	124	negatiivinen eksponentti	87
		etuliitteet	90
eksponenttiyhtälö		käänteisluku	18
määritelmä	143	kääntäen verrannollisuus	
ratkaiseminen potenssikaavoilla	143	määritelmä	38
ratkaiseminen systemaattisella		kääntäen verrannollisuus yhtälönä	41
kokeilulla	144		
ensimmäisen asteen yhtälö		laskulakien säilymisperiaate	83
yleinen ratkaisumenetelmä	23	liitântälaki	10
nimittäjien poistaminen	26	luonnolliset luvut	9
epänegatiivisuus	92	neliöjuuri	
geometrinen keskiarvo	120	määritelmä	92
googol	82	määrittelyehto	93
irrationaaliluvut	93	luvun osoittaminen neliöjuureksi	98
		tulon ja osamäärän neliöjuuri	99
juuri		neliöyhtälön $x^2 = a$ ratkaiseminen	105
yleisnimitys yhtälön ratkaisulle	23	osittelulaki	11
neliöjuuri	92	potenssi	
korkeammat juuret	113	eksponentti positiivinen kokonaisluku	64
ilmaiseminen potenssina	132	eksponentti nolla	84
sieventäminen potenssikaavoilla	137	eksponentti negatiivinen kokonaisluku	84
kaksijärjestelmä	71		
kantaluku	64	potenssi $a^{\frac{1}{n}}$, n positiivinen	
keskiverto	120	kokonaisluku	132
kokonaisluvut	12	eksponentti rationaaliluku	133

potenssikaavat		puoliintumisaika	117
tulon ja osamäärän potenssi	75	rationaaliluvut	16
samankantaisten potenssien tulo ja		ristiin kertominen	27
osamäärä	77	suoraan verrannollisuus	
potenssin potenssi	77	määritelmä	31
yleistys murtopotensseille	134	suoraan verrannollisuus yhtälönä	34
potenssiyhtälö		syntymäpäiväparadoksi	96
neliöyhtälö	105	tarkkuussääntö kerto- ja jakolaskulle	67
eksponentti positiivinen kokonaisluku	114	vaihdantalait	10
eksponentti rationaaliluku	139	vastaluku	12
prosentti		verrannollisuuskerto	34
määritelmä	46	virheprosentti	54
kuinka monta prosenttia a on b :stä . .	47	yhtäpitävyys	23
kuinka paljon on p prosenttia a :sta . .	48		
perusarvon ratkaiseminen	49		
muutosprosentti	51		
vertailuprosentti	52		
korotus ja alennus	55		
prosenttiyksikkö	53		